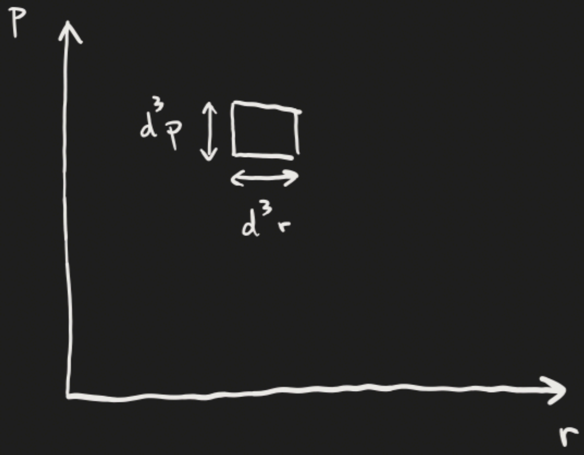
Guía 4, clase 1

Wednesday, 28 April 2021 17:02

Tong → kinetic theory



$$\underbrace{f(\vec{r},\vec{p},t)}_{\text{función de distribución}}\, d^3r\, d^3p = \#$$ medio de partículas en el elemento a tiempo t

Ejemplo: $\chi(\vec{r},\vec{p}) = \epsilon = \frac{p^2}{2m}$

1. Considere un gas clásico de partículas de masa m descripto por la función de distribución de una partícula $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$, y sea $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ una magnitud asociada a cada partícula del gas.

   (a) Si se usa la variable $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m$, ¿cuál es, en términos de f, la función de distribución adecuada?

   (b) Escribir la densidad de χ en el punto $\boldsymbol{r}$ a tiempo t, $\rho_\chi(\boldsymbol{r},t)$, en términos de f. ¿Cuál es la función $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ cuya densidad es la densidad de partículas $n(\boldsymbol{r},t)$?

   (c) Escribir el valor medio de χ en $\boldsymbol{r}$ y t, $\langle\chi\rangle(\boldsymbol{r},t)$, en términos de f. En particular, escribir la expresión integral que define la velocidad media $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$.

   (d) Se define la temperatura $T(\boldsymbol{r},t)$ mediante la ecuación $\langle(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2/2m\rangle = (3/2)kT$, por analogía con lo que ocurre en equilibrio (teorema de equipartición). Escribir la temperatura en términos de f.

Vel. media

$$\bar{u} = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle = \langle \vec{v} \rangle$$

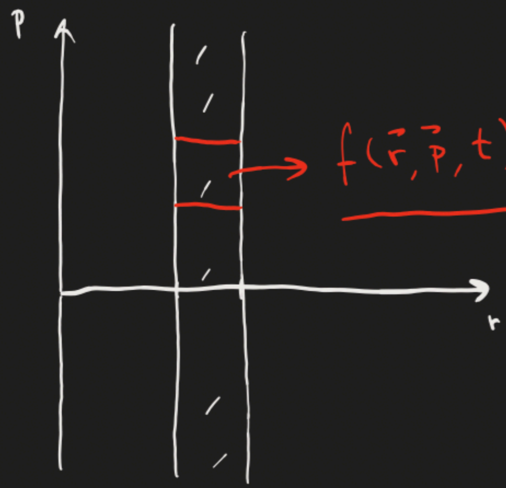
(a) $$\tilde{f}(\vec{r},\vec{v},t)\, \cancel{d^3r}\, \underbrace{d^3v}_{= dv_x\, dv_y\, dv_z} = f(\vec{r},\vec{p},t)\, \cancel{d^3r}\, \cancel{d^3}p$$

$$= \frac{dp_x}{m}\,\frac{dp_y}{m}\,\frac{dp_z}{m}$$

$$= \frac{d^3p}{m^3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tilde{f}(\vec{r},\vec{v},t) = m^3 f(\vec{r},\vec{p},t)}$$

(b) $$\rho_\chi \cancel{d^3r} = \cancel{d^3r} \int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\, \chi(\vec{r},\vec{p})$$



$$f(\vec{r},\vec{p},t)\, d^3r\, d^3p \cdot \chi(\vec{r},\vec{p})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho_\chi(\vec{r},t) = \int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\, \chi(\vec{r},\vec{p})}$$

$$n(\vec{r},t) = \int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t) = \rho_1(\vec{r},t) \qquad (\chi = 1)$$

(c) $$\langle \chi \rangle(\vec{r},t) = \frac{\chi \text{ total en } d^3r}{\# \text{ parts en } d^3r} = \frac{\rho_\chi \cancel{d^3r}}{n\, \cancel{d^3r}} =$$

$$= \frac{\rho_\chi}{n} = \frac{\int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\, \chi(\vec{r},\vec{p})}{\int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)}$$

$$\boxed{\rho_\chi = n \langle \chi \rangle}$$

$$\vec{u} = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle = \frac{\int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\, \frac{\vec{p}}{m}}{\int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)}$$

$$\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\int d^3v \; \tilde{f}(\vec{r},\vec{v},t)\, \vec{v}}{\int d^3v \; \tilde{f}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

(d)

El flujo de χ a través de un elemento de área con vector normal $\boldsymbol{n}$ siempre puede escribirse en la forma $\Phi_\chi = \boldsymbol{j}_\chi \cdot \boldsymbol{n}$. El vector $\boldsymbol{j}_\chi$ se conoce como la densidad de corriente de χ.

e) Escribir $\boldsymbol{j}_\chi(\boldsymbol{r}, t)$ en términos de f suponiendo que el elemento de área se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

Usualmente se consideran dos casos: $\boldsymbol{v}$ igual a la velocidad media del gas, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, o $\boldsymbol{v} = 0$. Como casos particulares, escribir las expresiones para:

f) La densidad de corriente de partículas, $\boldsymbol{j}$. Aquí se toma $\boldsymbol{v} = 0$. Relacionar el resultado con $\boldsymbol{u}$ y n.

g) La densidad de corriente de calor, $\boldsymbol{q}$, definida como la densidad de corriente de energía cinética medida en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad local del gas. Es decir, se toma $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, pero además se calcula la energía en el sistema de referencia en el que el gas está localmente en reposo, $\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = (\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t))^2/2m$.

h) El tensor de presión P_{ij}, es decir, la componente j de la densidad de corriente de la componente i del impulso, medida en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad local del gas: $\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = p_i - mu_i(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

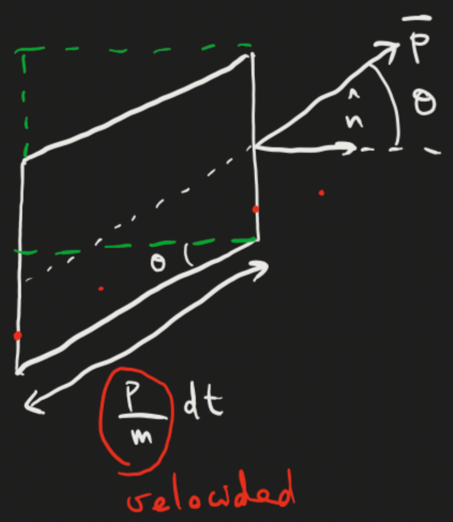
(e) $\vec{v} = 0$

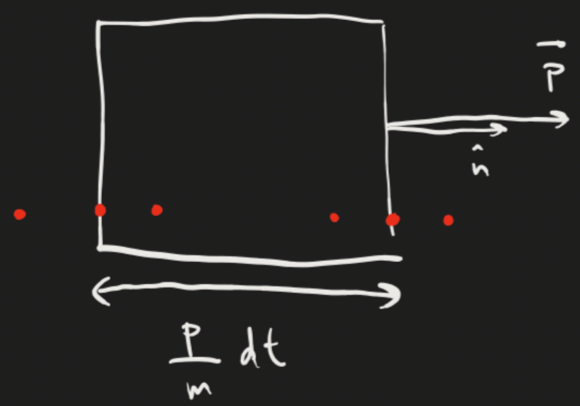
Velocidad a la q se mueve el elemento de área

$d\Phi_x$ contribución a Φ_x de las partículas con momento alrededor de $\vec{p}$

$d\Phi_x \; dA \; dt$ = χ total q atraviesa dA en dt debido a partículas con momento $\vec{p}$

= (# partículas con momento $\vec{p}$ q atraviesan dA en dt) $\times$ $\chi(\vec{r}, \vec{p})$





$$\# \text{ partículas} = \underbrace{f(\vec{r},\vec{p},t)\, d^3p}_{\substack{\text{Densidad} \\ \text{de partículas con} \\ \text{momento alrededor} \\ \text{de } \vec{p}}} \; dA \; dt \underbrace{\frac{p}{m}\cos\theta}_{= \frac{\vec{p}}{m}\cdot\hat{n}}$$

$$d\Phi_x \, \cancel{dA} \, \cancel{dt} = f(\vec{r},\vec{p},t)\, d^3p \, \cancel{dA} \, \cancel{dt} \, \frac{\vec{p}}{m}\cdot\hat{n} \quad \chi(\vec{r},\vec{p})$$

$$\Rightarrow \quad d\Phi_x = \underbrace{d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\; \chi(\vec{r},\vec{p})\, \frac{\vec{p}}{m}}_{= d\vec{J}_x} \cdot \hat{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_x = \int d^3p \; f(\vec{r},\vec{p},t)\; \underbrace{\chi(\vec{r},\vec{p})\, \frac{\vec{p}}{m}}}$$

$$= g_{x\vec{p}/m} = \boxed{n\left\langle x\frac{\vec{p}}{m}\right\rangle = \vec{J}_x}$$

Si $\vec{v} \neq 0 \longrightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{J}_x &= n\left\langle x\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{v}\right)\right\rangle \\ &= n\left\langle x\,\frac{\vec{p}-m\vec{v}}{m}\right\rangle\end{aligned}}$$

Velocidad del elemento de área

(f) $x = 1 \longrightarrow \vec{J} = n\left\langle\frac{\vec{p}}{m}\right\rangle = \boxed{n\vec{u} = \vec{J}}$

$\vec{v} = 0$

$\vec{u}(\vec{r},t)$

(g) $x = \dfrac{(\vec{p}-m\vec{u})^2}{2m}$

$\vec{v} = \vec{u}$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{q} = n\left\langle\frac{(\vec{p}-m\vec{u})^2}{2m}\,\frac{\vec{p}-m\vec{u}}{m}\right\rangle}$$

$$= g_{\chi \vec{p}/m} = \boxed{n \left\langle \chi \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle = \vec{J}_\chi}$$

Si $\vec{u} \neq 0 \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{J}_\chi &= n \left\langle \chi \left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{u} \right) \right\rangle \\ &= n \left\langle \chi \, \frac{\vec{p} - m\vec{u}}{m} \right\rangle \end{aligned}}$$

Velocidad del elemento de área

(f) $\chi = 1 \longrightarrow \vec{J} = n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle = \boxed{n\vec{u} = \vec{J}}$

$\vec{u} = 0$

$\vec{u}(\vec{r}, t)$

(g) $\chi = \dfrac{(\vec{p} - m\vec{u})^2}{2m}$

$\vec{u} = \vec{u}$

$$\left.\right\} \longrightarrow \boxed{\vec{q} = n \left\langle \frac{(\vec{p} - m\vec{u})^2}{2m} \, \frac{\vec{p} - m\vec{u}}{m} \right\rangle}$$

(h) $P_{ij} = n \left\langle \underbrace{(p_i - m u_i)} \dfrac{p_j - m u_j}{m} \right\rangle =$

Componente j de $\vec{J}_x$

$x = p_i - m u_i$

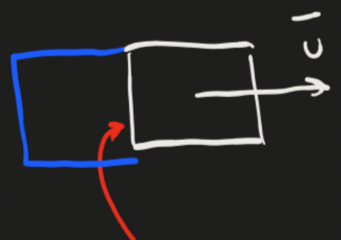
$\vec{v} = \vec{u}$

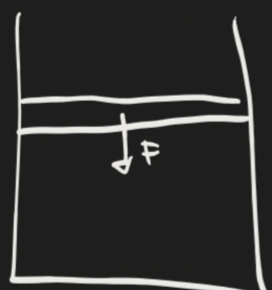
$$= n \left\langle p_i \frac{p_j - m u_j}{m} \right\rangle - n u_i \underbrace{\langle p_j - m u_j \rangle}_{=\ \langle p_j \rangle - m u_j\ =\ 0}$$

$$m u_j = \left\langle \frac{p_j}{m} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{ij} = n \left\langle p_i \frac{p_j - m u_j}{m} \right\rangle}$$

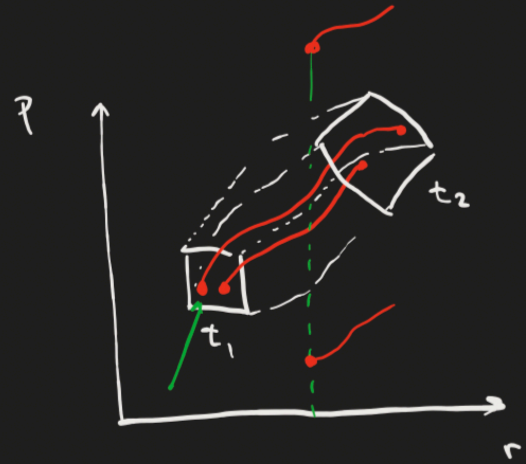
densidad de corriente de p_i





$$\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$$

Dinámica de la función de distribución: ec. de Boltzmann



$$f(\vec r(t_1), \vec p(t_1), t_1)\,(d^3r\, d^3p)(t_1)$$
$$\|$$
$$f(\vec r(t_2), \vec p(t_2), t_2)\,(d^3r\, d^3p)(t_2)$$

Teorema de Liouville: $(d^3r\, d^3p)(t_1) = (d^3r\, d^3p)(t_2)$

$\Longrightarrow$ $f(\vec r(t), \vec p(t), t)$ constante

Solución ecs Hamilton

$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec\nabla_r f)\cdot \underbrace{\dot{\vec r}}_{\|} + (\vec\nabla_p f)\cdot \underbrace{\dot{\vec p}}_{\|}$$

$$\vec{\nabla}_p H \qquad\qquad -\nabla_r H$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{(\vec{\nabla}_r f)\cdot\vec{\nabla}_p H - (\vec{\nabla}_p f)\cdot\vec{\nabla}_r H}_{= \{f, H\}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \qquad \text{ec. Liouville}$$

Hamiltoniano de 1 partícula

Gas diluido $\longrightarrow$ Está bien pensar q cada partícula evoluciona de acuerdo con el H de una partícula si se corrige con colisiones

Boltzmann :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col}}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

$$\{f, H\} = \underbrace{\vec{\nabla}_p H}_{= \frac{\vec{p}}{m}} \cdot \vec{\nabla}_r f - \underbrace{\vec{\nabla}_r H}_{= \vec{\nabla} V = -\vec{F}} \cdot \vec{\nabla}_p f$$

$$= \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p f$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col}}$$