Problema 2, guía 4

Enunciado

Si una cantidad $\chi(\mathbf{r},\mathbf{p})$, asociada a cada partícula, se conserva en las colisiones binarias, es decir, si $\chi_1' + \chi_2' = \chi_1 + \chi_2$, entonces es posible deducir leyes de conservación para las soluciones de la ecuación de Boltzmann. La forma de estas leyes es la siguiente (Huang §5.3):

$$\int d^3p\,\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f\right) = 0. \tag{1}$$

(a) Demostrar que, para $\chi = 1$, $\chi = p_i$ y $\chi = (\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2/2m$, resultan las siguientes ecuaciones de conservación asumiendo que $\mathbf{F}$ no depende del impulso:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0$$

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)u_i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i$$

$$\frac{3}{2}k\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)T = -\frac{1}{n}\left(\nabla\cdot\mathbf{q} + \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Interprete físicamente cada una de estas ecuaciones. ¿Son suficientes para determinar $n, \mathbf{u}$ y T?

(b) Estudiar cómo cambian las ecuaciones de arriba en el caso en que $\mathbf{F}$ es la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + (\mathbf{p}/m)\times\mathbf{B}\right]$ (que sí depende del impulso).

Resolución

Antes que nada, expliquemos un poco de dónde sale la ecuación (1). De acuerdo con la ecuación de Boltzmann se tiene

$$\int d^3p\,\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f\right) = \int d^3p\,\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{col}}.$$

Ahora, el miembro derecho de esta ecuación es la contribución de las colisiones a la derivada temporal de la densidad de χ, $\rho_\chi = \int d^3p\,\chi f$. Dado que χ se conserva en colisiones esta contribución tiene que anularse, lo cual da lugar a (1). Esto también se puede ver escribiendo explícitamente el término de colisiones (Huang §5.3).

(a) Empecemos escribiendo la ecuación (1) en términos de valores medios. Trataremos los tres términos de esa ecuación por separado. Para el primer término se tiene

$$\int d^3p\,\chi\frac{\partial f}{\partial t} = \int d^3p\left[\frac{\partial(\chi f)}{\partial t} - \frac{\partial\chi}{\partial t}f\right] = \frac{\partial(n\langle\chi\rangle)}{\partial t} - n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle,$$

donde n denota la densidad de partículas. En el último paso hemos usado la definición del valor medio, $\int d^3p\,A\,f = n\langle A\rangle$, y estamos permitiendo que la función χ dependa del tiempo además de la posición y el momento. Para el segundo término, tenemos

$$\begin{aligned}\int d^3p\, \chi\, \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f &= \int d^3p\, \chi\, \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{m} f\right) = \int d^3p \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\chi \frac{\mathbf{p}}{m} f\right) - (\nabla_{\mathbf{r}} \chi) \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} f\right] \\ &= \nabla \cdot \left(n \left\langle \chi \frac{\mathbf{p}}{m} \right\rangle\right) - n \left\langle (\nabla_{\mathbf{r}} \chi) \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} \right\rangle.\end{aligned}$$

En el primer término de la segunda línea, le hemos quitado el subíndice $\mathbf{r}$ al gradiente, porque los valores medios no dependen de $\mathbf{p}$ (se obtienen integrando en $\mathbf{p}$), así que la única variable respecto a la que se les puede tomar gradiente es $\mathbf{r}$ y por lo tanto el subíndice es innecesario. Finalmente, para el tercer término de (1) se tiene

$$\begin{aligned}\int d^3p\, \chi\, \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f &= \int d^3p\, \chi\, \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{F} f) = \int d^3p \left[\nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\chi \mathbf{F} f) - (\nabla_{\mathbf{p}} \chi) \cdot \mathbf{F} f\right] \\ &= -n\mathbf{F} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{p}} \chi \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

En la primera igualdad y la última hemos usado que $\mathbf{F}$ no depende del impulso. En la última igualdad también hemos asumido que la función de distribución f tiende a cero lo bastante rápido cuando el impulso tiende a infinito. Eso nos permite tirar el término $\int d^3p\, \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\chi \mathbf{F} f)$, que, por el teorema de Gauss, es una integral de superficie (en el espacio de momentos) de $\chi \mathbf{F} f$. De los tres resultados recién obtenidos vemos que podemos reescribir (1) en la forma

$$\boxed{\frac{\partial (n \langle \chi \rangle)}{\partial t} - n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\rangle + \nabla \cdot \left(n \left\langle \chi \frac{\mathbf{p}}{m} \right\rangle\right) - n \left\langle (\nabla_{\mathbf{r}} \chi) \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} \right\rangle - n\mathbf{F} \cdot \langle \nabla_{\mathbf{p}} \chi \rangle = 0.} \tag{3}$$

Ahora se trata de particularizar esta ecuación a los tres distintos valores de χ que el enunciado nos pide considerar, $\chi = 1$, $\chi = p_i$ y $\chi = (\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2/2m$ (nótese que las tres cantidades se conservan en colisiones).

Caso 1: $\chi = 1$. Reemplazando $\chi = 1$ en la ecuación (3) obtenemos inmediatamente

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0,} \tag{4}$$

donde $\mathbf{u} = \langle \mathbf{p}/m \rangle$ es la velocidad media del gas. Ésta es la ecuación de continuidad, que expresa la conservación del número de partículas: la derivada temporal del número de partículas en una determinada región del espacio es igual al número de partículas que entran en esa región por unidad de tiempo.

Caso 2: $\chi = p_i$. Reemplazando $\chi = p_i$ en (3), escribiendo la divergencia que aparece en el tercer término de esa ecuación componente a componente y usando en el último término que $\partial p_i / \partial p_j = \delta_{ij}$, obtenemos

$$m \frac{\partial (n u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(n \left\langle \frac{p_i p_j}{m} \right\rangle\right) - nF_i = 0. \tag{5}$$

La cantidad que queda dentro de la derivada en el segundo término (que se conoce como tensor de esfuerzos) se puede reescribir en términos del tensor de presión $P_{ij} =$

$n\langle p_i(p_j - mu_j)/m\rangle$,

$$n\left\langle \frac{p_i p_j}{m} \right\rangle = n\left[\left\langle \frac{p_i(p_j - mu_j)}{m}\right\rangle + \langle p_i\rangle u_j\right] = P_{ij} + mnu_iu_j.$$

Reemplazando este resultado en (5) se obtiene

$$m\left[\frac{\partial(nu_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(nu_iu_j)\right] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - nF_i = 0. \tag{6}$$

El término entre llaves se simplifica usando la ecuación de continuidad (4),

$$\begin{aligned}\frac{\partial(nu_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(nu_iu_j) &= n\frac{\partial u_i}{\partial t} + \cancel{u_i\frac{\partial n}{\partial t}} + n\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cancel{u_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(nu_j)}{\partial x_j}}\\ &= n\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_i\right).\end{aligned}$$

La ecuación de continuidad es lo que nos permite tachar esos dos términos. Reemplazando este resultado en (6), pasando los dos últimos términos al lado derecho del igual y dividiendo la ecuación por n se obtiene finalmente

$$\boxed{m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)u_i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i.} \tag{7}$$

Para interpretar esta ecuación, consideremos un elemento (o pedacito) de gas, es decir, un conjunto de partículas del gas que ocupan una región muy pequeña del espacio. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición del elemento en función del tiempo, tenemos $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$ (en otras palabras, la velocidad del elemento es la velocidad media). Por lo tanto, la componente i de la aceleración es $\ddot{r}_i = \partial u_i/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla u_i$. Queda entonces claro que (7) es la ecuación de Newton para un elemento de gas. En el lado derecho de la ecuación tenemos la fuerza (por partícula) sobre el elemento, que tiene dos términos: el primero es la fuerza que hacen los elementos adyacentes, el segundo la fuerza externa.

Caso 3: $\chi = (\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2/2m$. Reemplazando $\chi = (\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2/2m$ en (3), escribiendo el producto escalar que aparece en el cuarto término de esa ecuación componente a componente, usando

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = -(\mathbf{p} - m\mathbf{u})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x_i} = -(\mathbf{p} - m\mathbf{u})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} \qquad \nabla_{\mathbf{p}}\chi = \frac{\mathbf{p} - m\mathbf{u}}{m}$$

y teniendo en cuenta que $\langle\mathbf{p} - m\mathbf{u}\rangle = 0$ por definición de la velocidad media, obtenemos

$$\frac{3}{2}k\frac{\partial(nT)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(n\left\langle\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m}\right\rangle\right) + n\sum_{i=1}^{3}\left\langle\frac{p_i(\mathbf{p} - m\mathbf{u})}{m}\right\rangle\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \tag{8}$$

donde hemos usado la definición de la temperatura, $\langle(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2/2m\rangle = 3kT/2$. La cantidad que queda dentro de la divergencia en el segundo término se puede expresar en términos de la corriente de calor $\mathbf{q} = n\langle(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2(\mathbf{p} - m\mathbf{u})/2m^2\rangle$,

$$n\left\langle\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m}\right\rangle = n\left[\left\langle\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2m}\frac{\mathbf{p} - m\mathbf{u}}{m}\right\rangle + \left\langle\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2m}\right\rangle\mathbf{u}\right] = \mathbf{q} + \frac{3}{2}nkT\mathbf{u}.$$

Reemplazando este resultado en (8), escribiendo el producto escalar en el último término de esa ecuación componente a componente y recordando la definición del tensor de presión se obtiene

$$\frac{3}{2}k\left[\frac{\partial(nT)}{\partial t}+\nabla\cdot(nT\mathbf{u})\right]+\nabla\cdot q+\sum_{i,j=1}^{3}P_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0. \tag{9}$$

El término entre llaves se simplifica usando la ecuación de continuidad (4),

$$\frac{\partial(nT)}{\partial t}+\nabla\cdot(nT\mathbf{u})=n\frac{\partial T}{\partial t}+\cancel{T\frac{\partial n}{\partial t}}+n\mathbf{u}\cdot\nabla T+\cancel{T\nabla\cdot(n\mathbf{u})}=n\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla T\right).$$

La ecuación de continuidad es lo que nos permite tachar esos términos. Reemplazando este resultado en (9), pasando los dos últimos términos al lado derecho y dividiendo la ecuación por n obtenemos finalmente

$$\boxed{\frac{3}{2}k\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)T=-\frac{1}{n}\left(\nabla\cdot\mathbf{q}+\sum_{i,j=1}^{3}P_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).} \tag{10}$$

Esta ecuación es la primera ley de la termodinámica para un elemento de fluido: en el lado izquierdo tenemos la derivada temporal de la energía (por partícula) del elemento, y en el lado derecho tenemos el calor y el trabajo. Nótese que las tres ecuaciones que hemos encontrado ((4), (7) y (10)) no son suficientes para determinar n, $\mathbf{u}$ y T, porque involucran las corrientes P_{ij} y $\mathbf{q}$, las cuales no tienen una expresión cerrada en términos de esas tres variables.

(b) ¿Cómo cambia la ecuación (3), de la que se derivan todas las ecuaciones de conservación, si la fuerza depende del impulso? Bueno, cambia el último término, que es el que involucra la fuerza. Pero en el caso de la fuerza de Lorentz el cambio es muy pequeño. En efecto, tomando la dirección z paralela al campo magnético tenemos

$$\nabla_{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{m}\nabla_{\mathbf{p}}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{B})=\frac{B}{m}\nabla_{\mathbf{p}}\cdot(p_y\hat{\mathbf{x}}-p_x\hat{\mathbf{y}})=0.$$

Por lo tanto, podemos repetir todos los pasos de la ecuación (2), salvo el de sacar la fuerza fuera de la integral en momentos, y obtenemos

$$\int d^3p\,\chi\,\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}f=-n\langle\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\chi\rangle.$$

Entonces, la ecuación (3) se modifica sólo en que la fuerza tiene que estar dentro del valor medio, y lo mismo con las ecuaciones (4), (7) y (10). De hecho, como la fuerza sólo aparece en (7), sólo esta ecuación se modifica, reemplazando F_i por $\langle F_i\rangle$.