Guía 5, clase 2

Wednesday, 19 May 2021 17:01

8. **Paramagnetismo de Pauli.** Un electrón en un campo magnético H tiene una energía $\pm\mu_B H$, dependiendo de que el espín sea paralelo o antiparalelo al campo. Considere un gas de electrones a temperatura cero. Su interacción mutua y el efecto del campo magnético sobre el movimiento orbital de los electrones puede despreciarse.

   (a) Halle el valor máximo de la densidad N/V tal que todos los espines sean paralelos entre sí. ¿Cuánto vale la energía del gas en ese caso? Para uds

   (b) Ahora suponga como dato una energía de Fermi mayor que $\mu_B H$. Halle la magnetización y a partir de ella la susceptibilidad.

$$\epsilon(\bar{p}, \uparrow) = \frac{p^2}{2m} - \mu_B H$$

$$\epsilon(\bar{p}, \downarrow) = \frac{p^2}{2m} + \mu_B H$$

$$N_\uparrow = \underbrace{\sum_i}_{\text{estados con spin } \uparrow} n_i = \int_{-\mu_B H}^{\infty} \underbrace{d\epsilon \; g_\uparrow(\epsilon)}_{\substack{\#\text{ estados con spin } \uparrow \\ \text{y energía entre} \\ \epsilon \text{ y } \epsilon + d\epsilon}} n(\epsilon)$$

$$= \int_{-\mu_B H}^{\infty} d\epsilon \; g_\uparrow(\epsilon) \, \Theta(\epsilon_F - \epsilon)$$

$T=0$

$$= \int_{-\mu_B H}^{\epsilon_F} d\epsilon \; g_\uparrow(\epsilon)$$

$$N_\downarrow = \int_{+\mu_B H}^{\infty} d\epsilon \; g_\downarrow(\epsilon)\, n(\epsilon) \underset{T=0}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mu_B H}^{\infty} d\epsilon \; g_\downarrow(\epsilon)\, \Theta(\epsilon_F - \epsilon)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \epsilon_F < \mu_B H \\ \displaystyle\int_{\mu_B H}^{\epsilon_F} d\epsilon \; g_\downarrow(\epsilon) & \text{si} \quad \epsilon_F > \mu_B H \end{cases}$$

En ausencia de campo magnético,

$$g_\uparrow(\epsilon) = g_\downarrow(\epsilon) = \frac{1}{\cancel{2}} \underbrace{g_s \frac{2\pi V\,(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\epsilon}}_{\text{densidad de estados sin campo magnético (clase pasada)}} \equiv g_0(\epsilon)$$

$g_s = \cancel{2}$

En presencia de campo magnético,

$g_0(\epsilon)$ = # estados con spin up y <u>energía cinética</u> ϵ

$$= g_\uparrow(\epsilon - \mu_B H) \implies \left[g_\uparrow(\epsilon) = g_0(\epsilon + \mu_B H) \right]$$

$g_0(\epsilon)$ = # estados con spin down y <u>energía cinética</u> ϵ

$$= g_\downarrow(\epsilon + \mu_B H) \implies \left[g_\downarrow(\epsilon) = g_0(\epsilon - \mu_B H) \right]$$

$$\Rightarrow \quad N_\uparrow = \int_{-\mu_B H}^{\epsilon_F} d\epsilon \quad g_0(\underbrace{\epsilon + \mu_B H}_{\epsilon_c})$$

$$= \int_0^{\epsilon_F + \mu_B H} d\epsilon_c \quad g_0(\epsilon_c) = \boxed{\frac{4\pi V}{3h^3}\left[2m\left(\epsilon_F + \mu_B H\right)\right]^{3/2} = N_\uparrow}$$

$$\boxed{N_\downarrow = \begin{cases} 0 & \epsilon_F < \mu_B H \\ \dfrac{4\pi V}{3h^3}\left[2m\left(\epsilon_F - \mu_B H\right)\right]^{3/2} & \text{si} \quad \epsilon_F > \mu_B H \end{cases}}$$

(a) Todos los spines paralelos: $N_\downarrow = 0 \Rightarrow \epsilon_F < \mu_B H$

$$N = N_{\uparrow} = \frac{4\pi V}{3h^3}\left[2m\left(\epsilon_F + \mu_B H\right)\right]^{3/2} < \frac{4\pi V}{3h^3}\left(4m\mu_B H\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{N}{V} < \frac{4\pi}{3h^3}\left(4m\mu_B H\right)^{3/2}}$$

(b) $\epsilon_F > \mu_B H$

$$M = \mu_B\left(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}\right) = \mu_B \frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\left[\left(\epsilon_F + \mu_B H\right)^{3/2} - \left(\epsilon_F - \mu_B H\right)^{3/2}\right]$$

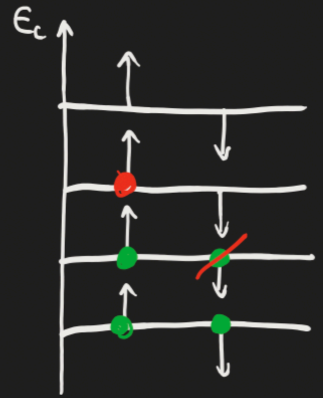
momento magnético total

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} = \mu_B \frac{4\pi V}{\cancel{3}h^3}(2m)^{3/2}\,\frac{\cancel{3}}{2}\sqrt{\epsilon_F^0}\left[\cancel{\left.\frac{\partial \epsilon_F}{\partial H}\right|_{H=0}} + \mu_B - \cancel{\left.\frac{\partial \epsilon_F}{\partial H}\right|_{H=0}} + \mu_B\right]$$

$$\Rightarrow \chi = \mu_B^2 \underbrace{\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon_F^0}}_{= g(\epsilon_F^0)} = \boxed{\mu_B^2\, g(\epsilon_F^0) = \chi}$$

(densidad de estados en ausencia de H)

Gas ideal común (guía 3): $\chi \propto \frac{1}{T}$ (ley de Curie)



9. **Diamagnetismo de Landau.** Considere un gas de electrones confinado a moverse en un plano de área A. Se aplica un campo magnético de módulo B en la dirección normal al plano. En estas condiciones, ignorando la interacción entre el spin de los electrones y el campo magnético, se obtiene que los niveles de energía monoparticulares son los de un oscilador armónico,

$$\epsilon = \hbar\omega(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\omega = eB/(mc)$ (e y m son respectivamente la carga y la masa del electrón y c es la velocidad de la luz). Cada nivel de energía tiene degeneración $g = 2AeB/(hc)$. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T y fugacidad z.

(a) Usando la fórmula de Euler-Maclaurin, $\sum_{n=0}^{\infty} f(n + 1/2) = \int_0^\infty dx\, f(x) + f'(0)/24$, pruebe que la función de partición grancanónica del gas está dada por

$$\ln Z_{\mathrm{GC}} \simeq g\left[\frac{kT}{\hbar\omega} f_2(z) - \frac{1}{24}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{z}{1+z}\right].$$

Discuta el caso $B = 0$.

(b) Calcule la magnetización $M = kT(\partial_B \ln Z_{\mathrm{GC}})_{T,A,z}$ del gas en función de T, A, B y el número de partículas N a primer orden en B, y obtenga de ahí la susceptibilidad magnética del gas. Discuta sus resultados.

(a) $$\log Z = \sum_i \log\left(1 + z e^{-\beta\epsilon_i}\right)$$

$$= \sum_\epsilon g(\epsilon) \log\left(1 + z e^{-\beta\epsilon}\right)$$

$$= g \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\log\left[1 + z e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}\right]}_{\equiv\, f(n+\frac{1}{2})}$$

$\hookrightarrow f(x) = \log\left(1 + z e^{-\beta\hbar\omega x}\right)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euler -} \\ \text{Mc Laurin}}}{=} g \left[\int_0^\infty dx \, \log\left(1 + z e^{-\beta\hbar\omega x}\right) + \frac{1}{24} \frac{-z\beta\hbar\omega}{1+z} \right]$$

$$\Rightarrow \log Z = g \left[\int_0^\infty dx \, \log\left(1 + z e^{-\beta\hbar\omega x}\right) - \frac{1}{24} \frac{z}{1+z} \beta\hbar\omega \right]$$

$$\int_0^\infty dx \, \log\left(1 + z e^{-\beta\hbar\omega x}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ y \equiv \beta\hbar\omega x}}{=} \frac{1}{\beta\hbar\omega} \int_0^\infty dy \, \underset{\substack{\shortparallel \\ f'}}{1} \, \underbrace{\log\left(1 + z e^{-y}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ g}}$$

$$= \frac{1}{\beta\hbar\omega}\left[\cancel{y \log\left(1+ z e^{-y}\right)\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty dy\; y\, \frac{z e^{-y}}{1+ z e^{-y}} \right]$$

$$= \frac{1}{\beta\hbar\omega} \underbrace{\int_0^\infty dy \, \frac{y}{z^{-1} e^{y} + 1}}_{= \underbrace{\Gamma(2)}_{=1} f_2(z)} = \frac{1}{\beta\hbar\omega} f_2(z)$$

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1} e^{x} + 1}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \longrightarrow \Gamma(2) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\log Z = g \left[\frac{1}{\beta\hbar\omega} f_2(z) - \frac{1}{24} \frac{z}{1+z} \beta\hbar\omega \right]}$$

$$\frac{2AeB}{hc} \qquad \frac{eB}{mc}$$

$$\log Z = \frac{2A\cancel{e}}{h\cancel{c}} \; \frac{m\cancel{c}}{\beta \hbar \cancel{e}} \; f_2(z) \qquad \hbar = h/2\pi$$

$B = 0$

$$= 2 \, A \, \frac{2\pi m kT}{h^2} \, f_2(z)$$

$$= \boxed{2 \, \frac{A}{\lambda^2} \, f_2(z) = \log Z \quad \text{para } B = 0}$$

(b) $$M = kT \, \frac{\partial}{\partial B} \log Z$$

$$= -\cancel{kT} \, \frac{\partial}{\partial B} \left[\frac{\cancel{2}Ae}{\cancel{h}c} \; \frac{1}{24} \; \frac{z}{1+z} \; \cancel{\beta}\hbar \, \frac{e}{mc} \, B^2 \right]$$

$$= - \frac{A e^2}{12 \pi m c^2} \frac{z}{1+z} B$$

Quiero M a 1er orden en B $\Rightarrow$ z a orden cero, i.e., para $B = 0$

$$B = 0 \longrightarrow \quad \log Z = 2 \frac{A}{\lambda^2} f_2(z)$$

$$\longrightarrow \quad N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z = 2 \frac{A}{\lambda^2} f_1(z)$$

$$z f_\nu'(z) = f_{\nu-1}(z$$

$$f_1(z) = \frac{1}{\underbrace{\Gamma(1)}_{\shortparallel}} \int_0^\infty dx \frac{1}{z^{-1} e^x + 1} = \int_0^\infty dx \frac{z e^{-x}}{1 + z e^{-x}}$$

$0! = 1$

$$= - \int_0^\infty dx \, \frac{\partial}{\partial x} \log\left(1 + z e^{-x}\right)$$

$$= - \log\left(1 + z e^{-x}\right) \Big|_0^\infty = \boxed{\log(1+z) = f_1(z)}$$

$$\Rightarrow \quad N = 2 \frac{A}{\lambda^2} \log(1+z)$$

$$\Rightarrow \quad \log(1+z) = \frac{\lambda^2}{2a} \leftarrow A/N$$

$$1 + z = e^{\lambda^2/2a} \longrightarrow z = e^{\lambda^2/2a} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{M = -\frac{Ae^2}{12\pi mc^2} \frac{e^{\lambda^2/2a} - 1}{e^{\lambda^2/2a}} B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi = -\frac{Ae^2}{12\pi mc^2} \left(1 - e^{-\lambda^2/2a}\right)}$$