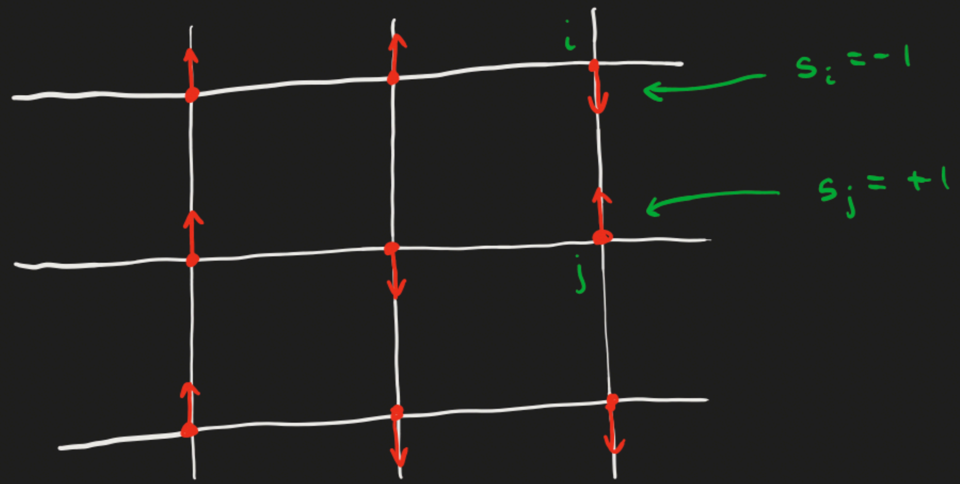
Modelo de Ising: red de spines

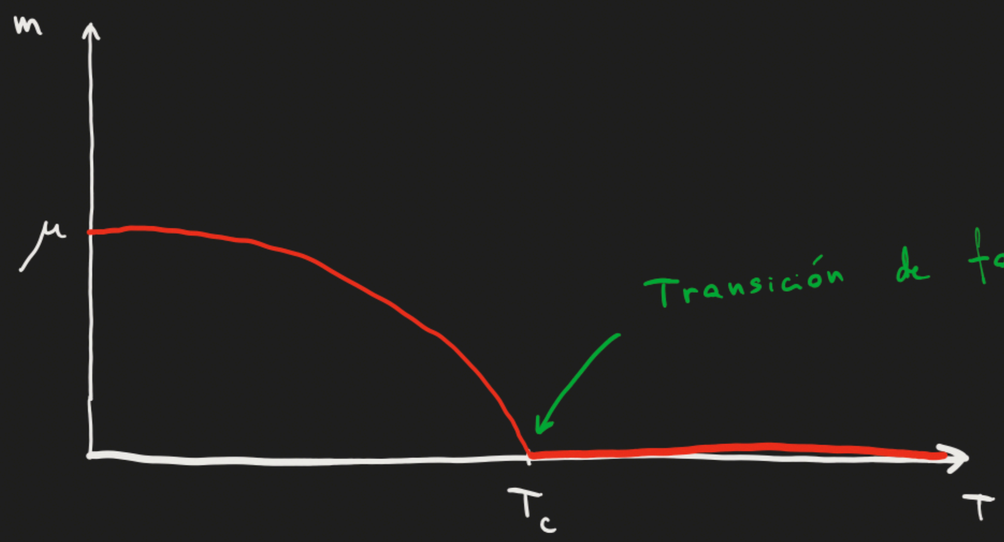


$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i$$

Pares de primeros vecinos

Magnetización $\quad m = \frac{\mu}{N} \left\langle \sum_{i=1}^{N} s_i \right\rangle$

En dimensión ≥ 2, se obtiene para $B \longrightarrow 0^+$



1. (Huang §14.6, Pathria §12.1) En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta. El método que se usa en este problema es el de la *matriz de transferencia*.

   (a) Considere una cadena cerrada de N espines. Muestre que la función de partición canónica es

   $$Z_N(b,K) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_N \\ =\pm 1}} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1})\right],$$

   donde $b = \beta\mu B$, $K = \beta J$, y $s_{N+1} = s_1$.

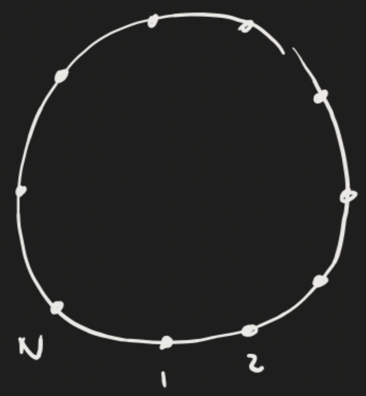
   (b) Muestre que $Z_N = \mathrm{Tr}\,(q^N)$, donde q es la matriz de 2×2 con elementos

   $$q_{ss'} = \exp\left[\frac{b}{2}(s+s') + K\,ss'\right] \qquad (s, s' = \pm 1).$$

   Ayuda: los exponentes en Z_N pueden ser reescritos de manera simétrica como

   $$\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N}\left(b\,\frac{s_i+s_{i+1}}{2} + K\,s_is_{i+1}\right).$$

(c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma $Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$, donde $\lambda_\pm = e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right)$ son los autovalores de la matriz q.



$\odot$

$\otimes$

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i$$

$$s_{N+1} = s_1$$

$$\sum_{i=1}^{N} s_i = \sum_{i=1}^{N} s_{i+1} \longrightarrow \sum_{i=1}^{N} s_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} s_i + \sum_{i=1}^{N} s_i\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (s_i + s_{i+1})$$

$$\Rightarrow \quad H = - \sum_{i=1}^{N} \left[J s_i s_{i+1} + \frac{\mu B}{2} (s_i + s_{i+1}) \right]$$

$$Z = \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{-\beta H(s_1, \dots, s_N)} =$$

$$= \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{\sum_{i=1}^{N} \left[\overset{\substack{K \\ \equiv}}{\beta J} s_i s_{i+1} + \overset{\substack{b \\ \equiv}}{\frac{\beta \mu B}{2}} (s_i + s_{i+1}) \right]}$$

$$= \sum_{s_1, \dots, s_N} \prod_{i=1}^{N} e^{\underbrace{K s_i s_{i+1} + \frac{b}{2} (s_i + s_{i+1})}_{= \, q_{s_i s_{i+1}}}}$$

q <u>matriz de transferencia</u>

$$= \sum_{s_1, \dots, s_N} \prod_{i=1}^{N} q_{s_i s_{i+1}}$$

$$= \sum_{s_1, \dots, s_N} q_{s_1 s_2} \, q_{s_2 s_3} \cdots q_{s_{N-1} s_N} \, q_{s_N s_1}$$

$$= \sum_{s_1} \left(q^N \right)_{s_1 s_1} = \boxed{\mathrm{Tr}\, q^N = Z}$$

$\uparrow$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$(ABC)_{ij} = \left[A(BC) \right]_{ij} = \sum_{k_1} A_{ik_1} (BC)_{k_1 j}$$

$$= \sum_{k_1, k_2} A_{ik_1} B_{k_1 k_2} C_{k_2 j}$$

$$(A^3)_{ij} = \sum_{k_1, k_2} A_{ik_1} A_{k_1 k_2} A_{k_2 j}$$

$$(A^N)_{ij} = \sum_{k_1, \dots, k_{N-1}} A_{ik_1} A_{k_1 k_2} \cdots A_{k_{N-1} j}$$

Traza independiente de la base $\Rightarrow$ Usamos base de autovectores

En esta base,

$$q = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \longrightarrow q^N = \begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \mathrm{Tr}\, q^N = \boxed{\lambda_+^N + \lambda_-^N = Z}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_{++} & q_{+-} \\ q_{-+} & q_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{k+b} & e^{-k} \\ e^{-k} & e^{k-b} \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(q - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} e^{k+b} - \lambda & e^{-k} \\ e^{-k} & e^{k-b} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (e^{k+b} - \lambda)(e^{k-b} - \lambda) - e^{-2k}$$

$$= \boxed{\lambda^2 - (e^{k+b} + e^{k-b})\lambda + e^{2k} - e^{-2k} = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda = \boxed{e^{k}\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4k}}\right) \equiv \lambda_\pm}$$

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N = \lambda_+^N \left[1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right] \underset{\substack{\uparrow \\ N \to \infty}}{\simeq} \lambda_+^N$$

$$\wedge$$

$$1$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial b} Z$$

$$''$$

$$m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial b} \log Z =$$

$$\left(Z = \sum_{s_1, \cdots, s_N} e^{\underset{\substack{\| \\ \beta J}}{K} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \underset{\substack{\| \\ \beta \mu B}}{b} \sum_{i=1}^N s_i} \right)$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial b} \log \lambda_+ = \mu \frac{\partial}{\partial b} \log \left(\cosh b + \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}} \right)$$

$$= \dots = \boxed{\mu \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} = m}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ \beta\mu B}}{b} \to 0 \implies m \to 0 \implies \nexists \text{ magnetización espontánea}$$

3. Para la cadena abierta sin campo, escriba la función de partición como una suma sobre todos los espines, sume explícitamente sobre el último espín y encuentre una relación de recurrencia para Z'_N en términos Z'_{N-1}. Resuelva la relación de recurrencia y verifique que coincide con el resultado del problema anterior.

Cadena abierta

Cadena abierta sin campo $\longrightarrow$ $H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}$

$$Z_N = \sum_{s_1,\dots,s_N} e^{-\beta H(s_1,\dots,s_N)} =$$

$$= \sum_{s_1,\dots,s_N} \prod_{i=1}^{N-1} e^{k s_i s_{i+1}}$$

$$= \sum_{s_1,\dots,s_N} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N-2} e^{k s_i s_{i+1}} \right)}_{\text{no depende de } s_N} e^{k s_{N-1} s_N}$$

$$= \sum_{s_1,\dots,s_{N-1}} \left(\prod_{i=1}^{N-2} e^{k s_i s_{i+1}} \right) \sum_{s_N=\pm 1} e^{k s_{N-1} s_N}$$

$$\sum_{s_N=\pm 1} e^{k s_{N-1} s_N} = e^{k s_{N-1}} + e^{-k s_{N-1}} =$$

$$2\cosh(K s_{N-1}) \underset{\leftarrow s_{N-1}=\pm 1}{=} 2\cosh K$$

$$= 2\cosh K \underbrace{\sum_{s_1,\dots,s_{N-1}} \prod_{i=1}^{N-2} e^{K s_i s_{i+1}}}_{= Z_{N-1}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_N = (2\cosh K)\, Z_{N-1} = (2\cosh K)^2 Z_{N-2}$$

$$= \dots = (2\cosh K)^{N-1} \underbrace{Z_1}_{=2}$$

$\leftarrow$ 2 estados, los dos con energía 0

$$\Rightarrow \boxed{Z_N = 2\,(2\cosh K)^{N-1}} = 2^N (\cosh K)^{N-1}$$

5. Considere una cadena de Ising abierta y sin campo magnético, con una constante de acoplamiento distinta para cada par de primeros vecinos. El hamiltoniano es pues

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1},$$

donde $J_i > 0$, N es el número de espines y $s_i = \pm 1$. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Pruebe que la función de partición canónica del sistema es

$$Z_N(K_1, \dots, K_{N-1}) = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh K_i,$$

Idéntico al prob 3

donde $K_i = \beta J_i$ (*ayuda:* no use la matriz de transferencia; empiece buscando una relación de recurrencia entre $Z_N(K_1, \dots, K_{N-1})$ y $Z_{N-1}(K_1, \dots, K_{N-2})$).

(b) Calcule la función de correlación $C(r) = \langle s_1 s_{r+1} \rangle$ tomando las derivadas adecuadas de la función de partición (*ayuda:* estudie primero el caso $r = 1$, y para r genérico tenga en cuenta que $s_1 s_{r+1} = (s_1 s_2)(s_2 s_3) \dots (s_r s_{r+1})$, porque $s_i^2 = 1$).

(b) $$C(r) = \langle s_1 s_{r+1} \rangle - \cancel{\underbrace{\langle s_1 \rangle}_{\substack{\| \\ m=0}} \langle s_{r+1} \rangle}$$

$m = 0$ en 1D

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle = \frac{1}{N} N \langle s_1 \rangle = \cancel{1}\langle s_1 \rangle$$

$$\langle XY \rangle = \sum_{X,Y} XY\, P(X,Y)$$

$$\doteq \sum_{x,y} x\,y\,P(x)\,P(y) = \sum_x x\,P(x) \sum_y y\,P(y)$$

$$\sum_x x\,P(x) = \langle x \rangle \qquad \sum_y y\,P(y) = \langle y \rangle$$

si X e Y independientes

$$= \langle x \rangle \langle y \rangle$$

si X, Y independientes

$$\Downarrow$$

$$\langle x\,y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = 0$$

$$C(r) = \langle s_1 s_{r+1} \rangle \underset{s_i^2 = 1}{=} \langle s_1 s_2^2 s_3^2 \dots s_r^2 s_{r+1} \rangle$$

$$= \langle (s_1 s_2)(s_2 s_3) \dots (s_r s_{r+1}) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial K_1} \dots \frac{\partial}{\partial K_r} Z$$

$$Z = \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{\sum_{i=1}^{N-1} k_i s_i s_{i+1}}$$

$$= \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{k_1 s_1 s_2} e^{k_2 s_2 s_3} \cdots e^{k_{N-1} s_{N-1} s_N}$$

$$\Rightarrow \quad C(r) = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial k_1} \cdots \frac{\partial}{\partial k_r} Z = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N-1} \cosh k_i} \frac{\partial}{\partial k_1} \cdots \frac{\partial}{\partial k_r} \prod_{i=1}^{N-1} \cosh k_i$$

$$Z = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh k_i$$

(item a)

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{N-1} \cosh k_i} \prod_{i=1}^{r} \sinh k_i \prod_{i=r+1}^{N-1} \cosh k_r$$

$$= \boxed{\prod_{i=1}^{r} \text{tgh}\, K_i = C(r)}$$

(c) Muestre que, en el caso $J_1 = J_2 = \cdots = J_{N-1} \equiv J$, la función de correlación tiene la forma $C(r) = e^{-r/\xi}$, y calcule la longitud de correlación ξ. ¿Qué valores toma ξ en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$?

$$K_i = K \Rightarrow C(r) = (\text{tgh}\, K)^r$$

$$= e^{r \log(\text{tgh}\, K)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = -\frac{1}{\log(\text{tgh}\, K)}} > 0$$

$T \to 0 \implies \beta \to \infty \implies K = \beta J \to \infty \implies \operatorname{tgh} K \to 1$

$\implies \log(\operatorname{tgh} K) \to 0^- \implies \boxed{\xi \to \infty}$ $T \to 0 = T_c$ en $d=1$

$$\boxed{T \to \infty \implies \xi \to 0}$$