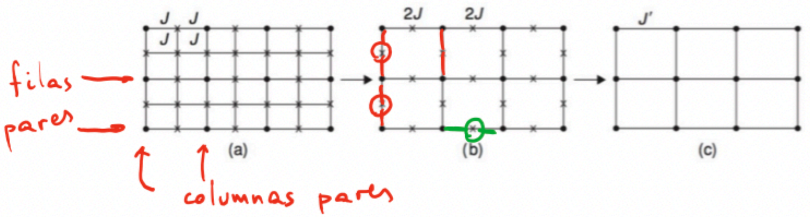
Guía 8, clase 3

Wednesday, 30 June 2021 18:33

8. Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal-Kadanoff, que se muestra en la figura.



La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se eliminan, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplo de los enlaces restantes se cambia de J a $2J$. Eso nos lleva de la figura (a) a la figura (b). Y segundo, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplo J'.

(a) Muestre que la relación de recurrencia para el modelo de Ising en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = 2x^2/(1+x^4),$$

donde $x = \exp(-2K)$ y $x' = \exp(-2K')$. Ignorando los puntos fijos triviales $x^* = 0$ y $x^* = 1$, muestre que un punto fijo no trivial de esta transformación es

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \simeq 0.5437.$$

Compare con el valor real de x_c.

(b) Linealizando alrededor de este punto fijo no trivial, muestre que el autovalor λ de esta transformación es

$$\lambda = 2(1-x^*)/x^* \simeq 1.6785$$

y por lo tanto el exponente $\nu \simeq 1.338$. Compare con el valor real de ν.

8 links

Estado fundamental:

$E_{bloque} = -J \cdot 8$

$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$

$$H = -J \sum_{i,j=1}^{L} s_{ij}\left(s_{i+1\,j} + s_{i\,j+1}\right)$$

$$\simeq -2J \sum_{i,j=1}^{L/2} \Big[s_{2i+1,2j} \big(\underline{s_{2i,2j} + s_{2i+2,2j}} \big)$$

$$+ s_{2i,2j+1}\left(s_{2i,2j} + s_{2i,2j+2}\right)\Big] \simeq H$$

Decimamos: $s'_{ij} = s_{2i,2j}$

$$P(\{s'_{ij}\}) = P(\{s_{2i,2j}\}) =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{\substack{\{s_{2i+1,2j};\\ s_{2i,2j+1}\}}} e^{-\beta \underline{H(s)}}$$

$$= \frac{1}{Z} \prod_{i,j=1}^{L/2} \underbrace{Z_{2i+1,2j}}_{} \; Z_{2i,2j+1} = \sum_{s_{2i,2j+1}} e^{2k\, s_{2i,2j+1} \underline{\left(s_{2i,2j} + s_{2i,2j+2}\right)}}$$

$$= \sum_{s_{2i+1,2j}} e^{2k\, s_{2i+1,2j}\left(s_{2i+2,2j} + s_{2i,2j}\right)}$$

$$= 2\cosh\left[2k\left(s_{2i+2,2j} + s_{2i,2j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{Z} \prod_{i,j=1}^{L/2} 2\cosh\left[2K\left(s_{2i+2,2j} + s_{2i,2j}\right)\right] \times$$

$$\times\, 2\cosh\left[2K\left(s_{2i,2j} + s_{2i,2j+2}\right)\right]$$

$$\boxed{= \frac{4^{L^2/4}}{Z} \prod_{i,j=1}^{L/2} \cosh\left[2K\left(s'_{ij} + s'_{i+1\,j}\right)\right] \cosh\left[2K\left(s'_{ij} + s'_{i\,j+1}\right)\right] = P(\{s'_{ij}\})}$$

$$= \frac{1}{Z'} e^{-\beta' H(\{s'_{ij}\})}$$

$$e^{-\beta' H(\{s'_{ij}\})} = \prod_{i,j=1}^{L/2} e^{K' s'_{ij}\left(s'_{i+1\,j} + s'_{i\,j+1}\right)}$$

$$= \prod_{i,j=1}^{L/2} e^{K' s'_{ij} s'_{i+1\,j}} \; e^{K' s'_{ij} s'_{i\,j+1}}$$

$$\Longrightarrow \left[e^{k' s'_1 s'_2} = \alpha \cosh\left[2k\,(s'_1 + s'_2) \right] \right]$$

$$+\,+ \qquad e^{k'} = \alpha \cosh(4k) \quad \leftarrow$$

$$+\,- \qquad e^{-k'} = \alpha \quad \leftarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{e^{2k'} = \cosh(4k)}$$

Transf. del GR

$$x \equiv e^{-2k} \Longrightarrow x' = e^{-2k'} = \frac{1}{\cosh(4k)}$$

$$= \frac{2}{e^{4k} + e^{-4k}} = \frac{2}{\frac{1}{x^2} + x^2}$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{2x^2}{1+x^4}}_{R(x)} = x'}$$

Ptos fijos: $x' = x \longleftrightarrow x = \dfrac{2x^2}{1+x^4}$

$x = 0$ solución

$x \neq 0 \longrightarrow 1 = \dfrac{2x}{1+x^4} \longrightarrow x^4 - 2x + 1 = 0 \quad (1)$

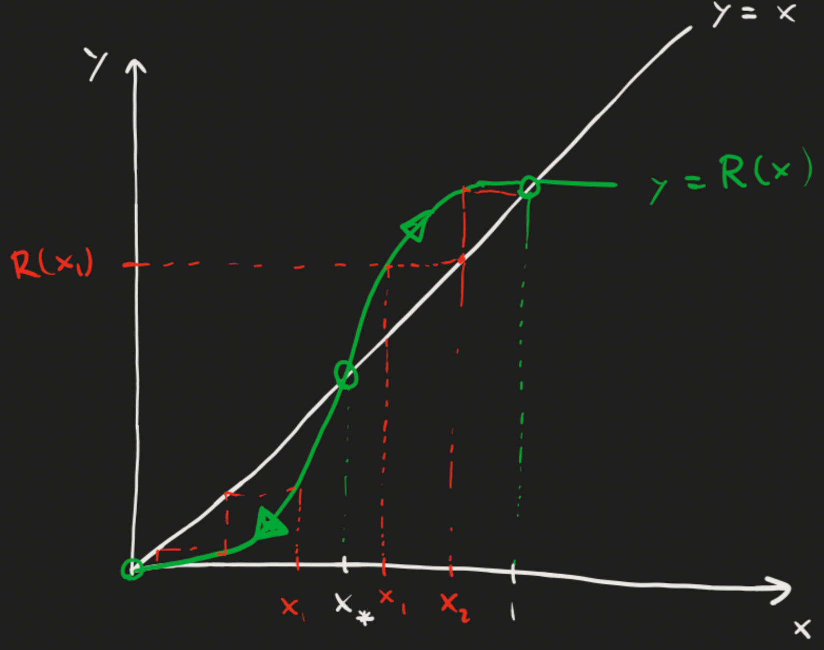
$x = 1$ solución

$x \neq 1 \Longrightarrow$ Divido la ec. (1) por $x - 1$

$\longrightarrow x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x \simeq 0.5437 \equiv x_*}$$

$\Rightarrow$ 3 ptos fijos: $0,\ 1,\ x_*$



$$R(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}$$

$$R'(1) = 0$$

$$x_2 = R(x_1)$$

$\Rightarrow$ Pto crítico es $x_* = e^{-2K_*}$ $\Rightarrow$ $\boxed{K_* = -\frac{1}{2}\log x_* \simeq 0.3047}$

$$K_c^{\text{Onsager}} \simeq 0.4407$$

$$K_c^{\text{cm}} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(b) $\quad x' = R(x)$

$$R(x_* + \delta x) \simeq \underbrace{R(x_*)}_{= x_*} + \underbrace{R'(x_*)}_{\equiv \lambda} \delta x$$

$$= x_* + \lambda \delta x$$

$$x' = x_* + \delta x'$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta x' = \lambda \delta x}$$

δx función de T, $\underline{\delta x = 0 \text{ a } T_c}$ $\Rightarrow$ $\delta x \simeq \alpha \underbrace{(T - T_c)}_{= \delta T}$

$$\Rightarrow \boxed{\delta T' = \lambda \delta T} \longleftarrow$$

$$\xi = \alpha\,(T-T_c)^{-\nu} = \alpha\,\delta T^{-\nu}$$

$$\xi' = \frac{\xi}{\ell}$$

← espaciado de la subred en unidades del espaciado de la red original

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\alpha}\,\delta T'^{-\nu}}_{=\,\xi'} = \underbrace{\cancel{\alpha}\,\frac{\delta T^{-\nu}}{\ell}}_{=\,\xi/\ell}$$

$$\lambda^{-\nu}\,\cancel{\delta T^{-\nu}} = \frac{\cancel{\delta T^{-\nu}}}{\ell}$$

$$\Rightarrow \lambda^{-\nu} = \frac{1}{\ell}$$

$$\boxed{\nu = \frac{\log \ell}{\log \lambda}}$$

En nuestro caso, $\ell = 2$

$$\lambda = R'(x_*) = \frac{4x_*}{1+x_*^4} - \frac{2x_*^2}{(1+x_*^4)^2}\,4x_*^3$$

$$R(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}$$

$$\frac{4x_*}{1+x_*^4} = \frac{2}{x_*}\,\frac{2x_*^2}{1+x_*^4}$$

$$\frac{2x_*^2}{1+x_*^4} = x_*$$

$$= 2\left(1 - x_*^3\right) \simeq \boxed{1.6785 \simeq \lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\log l}{\log \lambda} \simeq 1.338}$$

$$\nu_{\text{exacto}} = 1$$

$$\nu_{\text{Landau-Ginzburg}} = \frac{1}{2}$$