Física Teórica 3 – 1er cuatrimestre de 2021

Guía 7: *Modelo de Ising*

1. (Huang §14.6, Pathria §12.1) En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta. El método que se usa en este problema es el de la *matriz de transferencia*.

   (a) Considere una cadena cerrada de N espines. Muestre que la función de partición canónica es

   $$Z_N(b,K) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_N\\=\pm 1}} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1})\right],$$

   donde $b=\beta\mu B$, $K=\beta J$, y $s_{N+1}=s_1$.

   (b) Muestre que $Z_N = \mathrm{Tr}\,(q^N)$, donde q es la matriz de 2×2 con elementos

   $$q_{ss'} = \exp\left[\frac{b}{2}(s+s') + K\,ss'\right] \qquad (s,s'=\pm 1).$$

   Ayuda: los exponentes en Z_N pueden ser reescritos de manera simétrica como

   $$\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N}\left(b\,\frac{s_i+s_{i+1}}{2} + K\,s_is_{i+1}\right).$$

   (c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma $Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$, donde $\lambda_\pm = e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right)$ son los autovalores de la matriz q.

   (d) Muestre que $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln Z_N}{N} = \ln\lambda_+$.

   (e) Calcule la magnetización media $M=M(T,B)$ y muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B\to 0^+$. Ayuda: la magnetización media por espín es

   $$\mu\bar{s} = \mu\,\frac{1}{N}\frac{\partial \ln Z_N}{\partial b}\bigg|_K.$$

2. (a) Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de la cadena lineal con extremos abiertos: muestre primero que la función de partición es $Z'_N = \sum_{s,s'} e^{b(s+s')/2}\left[q^{N-1}\right]_{ss'}$ y luego que

   $$Z'_N = \left[\cosh b + \frac{\sinh^2 b + e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\right]\lambda_+^{N-1} + \left[\cosh b - \frac{\sinh^2 b + e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\right]\lambda_-^{N-1}.$$

   (b) Muestre que $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln Z'_N}{N} = \ln\lambda_+$.

3. Para la cadena abierta sin campo, escriba la función de partición como una suma sobre todos los espines, sume explícitamente sobre el último espín y encuentre una relación de recurrencia para Z'_N en términos Z'_{N-1}. Resuelva la relación de recurrencia y verifique que coincide con el resultado del problema anterior.

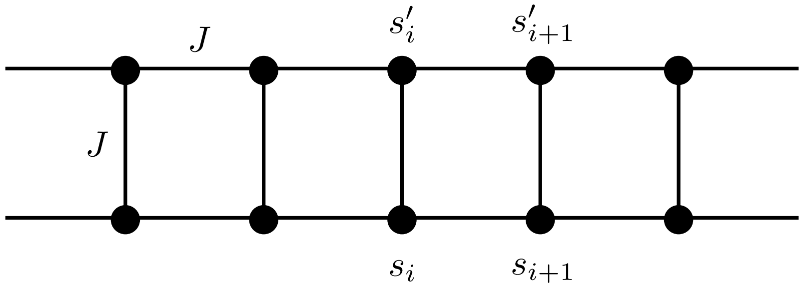
4. Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de una doble cadena Ising cerrada y sin campo externo,

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1} \right) - J \sum_{i=1}^{N} s_i s'_i .$$

Muestre que para $N \gg 1$

$$\frac{1}{2N} \log Z_N \simeq \frac{1}{2} \log \left[2 \cosh K \left(\cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right) \right],$$

donde $K = \beta J$. *Ayuda*: reescribir el término de interacción entre las cadenas de manera simétrica, $\sum_{i=1}^{N} s_i s'_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s'_i + s_{i+1} s'_{i+1} \right)$. La matriz de transferencia será de 4×4.



5. Considere una cadena de Ising abierta y sin campo magnético, con una constante de acoplamiento distinta para cada par de primeros vecinos. El hamiltoniano es pues

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1},$$

donde $J_i > 0$, N es el número de espines y $s_i = \pm 1$. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Pruebe que la función de partición canónica del sistema es

$$Z_N(K_1, \ldots, K_{N-1}) = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh K_i,$$

donde $K_i = \beta J_i$ (*ayuda:* no use la matriz de transferencia; empiece buscando una relación de recurrencia entre $Z_N(K_1, \ldots, K_{N-1})$ y $Z_{N-1}(K_1, \ldots, K_{N-2})$).

(b) Calcule la función de correlación $C(r) = \langle s_1 s_{r+1} \rangle$ tomando las derivadas adecuadas de la función de partición (*ayuda:* estudie primero el caso $r = 1$, y para r genérico tenga en cuenta que $s_1 s_{r+1} = (s_1 s_2)(s_2 s_3) \ldots (s_r s_{r+1})$, porque $s_i^2 = 1$).

(c) Muestre que, en el caso $J_1 = J_2 = \cdots = J_{N-1} \equiv J$, la función de correlación tiene la forma $C(r) = e^{-r/\xi}$, y calcule la longitud de correlación ξ. ¿Qué valores toma ξ en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$?

6. La aproximación de campo medio más simple para el modelo de Ising con condiciones periódicas consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para un solo espín, s, reemplazando la interacción con sus γ primeros vecinos por un término efectivo de la forma $E_1 = -J\gamma s\bar{s}$, donde $\bar{s}$ es el valor medio de cualquier espín. La interacción lineal con un campo magnético externo sigue siendo $-B\mu s$. Escriba la ecuación de autoconsistencia para el valor medio del espín y encuentre la temperatura crítica, T_c, por debajo de la cual hay magnetización espontánea. Para el caso $\gamma = 4$, compare esta solución con el valor exacto, $kT_c = -2J/\log(\sqrt{2} - 1)$.

7. En la aproximación de campo medio para un solo espín del problema anterior, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:

   (a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^\beta$ para $T \longrightarrow T_c^-$.

   (b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.

   (c) La susceptibilidad magnética $\chi_T(T, B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)^{-\gamma}$ para $T \longrightarrow T_c^-$.

8. Una segunda aproximación de campo medio consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para dos espines vecinos, s_1 y s_2, conservando de manera exacta su interacción mutua, pero reemplazando los espines de los otros sitios vecinos por su valor medio $\bar{s}$.

   (a) Hallar la ecuación de autoconsistencia para el valor de expectación $\bar{s}$ y con ella una expresión para T_c. Encontrar (numéricamente si es necesario) el valor de T_c para la red cuadrada y comparar con el resultado exacto y con el obtenido en la aproximación de campo medio para un solo espín.

   (b) Hallar U y C_V para $T > T_c$.

9. Encontrar numéricamente la temperatura crítica para una red cuadrada en una aproximación de campo medio en donde la interacción de cuatro espines en una celda fundamental sea descripta de manera exacta. Comparar con el resultado exacto y con las aproximaciones de los problemas anteriores.

10. Ídem al anterior, pero en un modelo de campo medio que incluya exactamente las interacciones de toda una hilera de espines, como en el problema 1.