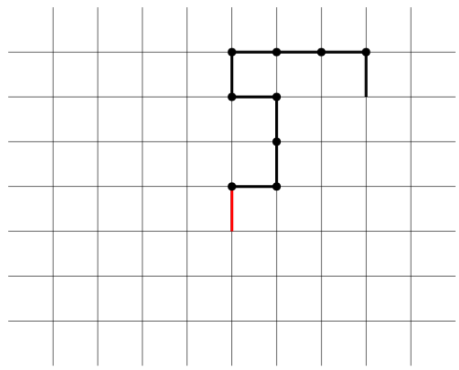
Primer parcial de Física Teórica 3
12/5/2021

Problema 1

Considere una cadena lineal formada por N eslabones, que se disponen sobre una grilla bidimensional tal como se muestra en la figura.



El eslabón rojo es externo al sistema y está fijo. Cada eslabón puede colocarse o bien perpendicularmente al anterior (dos posibilidades) o bien paralelamente (una posibilidad). Si se coloca perpendicularmente tiene energía $\epsilon > 0$, y si lo hace paralelamente tiene energía 0. Se trata de analizar este sistema en el ensamble microcanónico.

(a) Escriba la energía E del sistema en términos del número $n_\perp$ de eslabones que se colocan perpendicularmente al eslabón anterior. Calcule el número de microestados compatibles con un dado valor de E, y verifique su resultado explorando todas las posibilidades en los casos sencillos $N = 1$ y $N = 2$.

(b) A partir de lo anterior, calcule la entropía del sistema en función de E (asumiendo $n_\perp, N - n_\perp \gg 1$), y grafique cualitativamente su resultado. ¿Qué ocurre con la temperatura en la región $2N\epsilon/3 < E < N\epsilon$?

(c) Calcule la energía del sistema en función de su temperatura T, y discuta su resultado en los casos $T = 0$ y $T \to \infty$.

(d) ¿Cómo cambia el número de microestados con una dada energía si la grilla es tridimensional en lugar de bidimensional?

Problema 2

Considere un gas ideal de N partículas de masa m con un grado de libertad interno de vibración de frecuencia ω. Este último grado de libertad lo trataremos cuánticamente, de manera que las energías de una partícula son

$$\epsilon(\boldsymbol{p}, n) = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega(n + 1/2),$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$ El gas está contenido en un recipiente de volumen V, y se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule la función de partición canónica del sistema.

(b) Calcule el calor específico a volumen constante, y grafíquelo cualitativamente en función de T. ¿Cómo cambia el resultado si el grado de libertad de vibración es tratado clásicamente en lugar de cuánticamente?

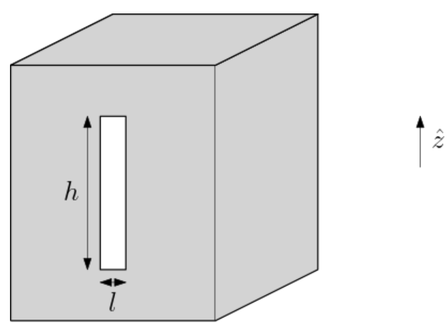
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que una dada partícula tenga su grado de libertad de vibración en el estado fundamental $n = 0$? ¿Y la de que eso ocurra exactamente para k partículas del gas? Para este ítem, suponga que las partículas del gas son distinguibles.

Problema 3

Un gas ideal formado por partículas de masa m se encuentra en equilibrio a temperatura T en presencia del campo gravitatorio terrestre. La función de distribución es pues

$$f(z, \boldsymbol{p}) = \frac{n(z)}{(2\pi m k T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \qquad n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right),$$

donde n_0 es la densidad de partículas a $z = 0$. Sobre una de las caras laterales del recipiente se practica una apertura de ancho l y altura h, tal como se muestra en la figura.



Suponga que la base de la apertura se encuentra a $z = 0$. El recipiente está en contacto con un reservorio térmico, de manera que su temperatura permanece constante.

(a) Calcule el número de partículas que escapan por la apertura por unidad de tiempo.

(b) Calcule la cantidad de energía cinética que escapa por la apertura por unidad de tiempo.

(c) Teniendo en cuenta que la energía cinética del gas dentro del recipiente es $E_c = 3NkT/2$, donde N es el número de partículas, calcule la energía cinética que el reservorio transfiere al gas por unidad de tiempo.

Ayuda: $\int_0^\infty dx\, x^{2k+1} e^{-x^2} = k!/2$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Por otra parte, para aligerar las cuentas, se recomienda expresar los resultados de los ítems (b) y (c) en términos del resultado del ítem (a).