

Resolución segundo parcial de Física Teórica 3

7/7/2021

Problema 1

(a) Calculamos $N_{-/+}$ directamente a partir de la distribución de Fermi Dirac, como la suma sobre todos los estados con spin paralelo/antiparalelo al campo del número de partículas en ese estado,

$$N_{\mp} = \int \frac{d^2p d^2q}{h^2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(p^2/2m \mp \mu_m B)} - 1}. \quad (1)$$

Esta cuenta la podríamos hacer explícitamente, pero en realidad no hace falta: es el número de partículas del gas ideal común en dos dimensiones y con $g_s = 1$, pero evaluado en una fugacidad $z_{\mp} = z e^{\pm \beta \mu_m B}$,

$$N_{\mp} = \frac{A}{\lambda^2} f_1(z e^{\pm \beta \mu_m B}) = \frac{A}{\lambda^2} \log(1 + z e^{\pm \beta \mu_m B}), \quad (2)$$

donde en el último paso hemos usado que $f_1(z) = \log(1 + z)$. La magnetización, entonces, es

$$M = \mu_m (N_- - N_+) = \mu_m \frac{A}{\lambda^2} [\log(1 + z e^{\beta \mu_m B}) - \log(1 + z e^{-\beta \mu_m B})], \quad (3)$$

y con esto terminamos este ítem.

(b) Derivemos la ecuación (3) para obtener la susceptibilidad,

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} = \mu_m \frac{A}{\lambda^2} \frac{1}{1+z} 2z\beta\mu_m = \mu_m^2 A \frac{4\pi m}{h^2} \frac{z}{1+z}. \quad (4)$$

En realidad, la susceptibilidad es una derivada a N constante, no a z constante, así que incluye también un término proporcional a $\partial z / \partial B|_{B=0}$, pero el factor de proporcionalidad se anula, así que ese término extra es cero. Aún no hemos terminado porque el problema nos pide expresar la susceptibilidad en función de N , no de z ; para hacerlo, hay que despejar z de la ecuación para N ,

$$N = N_- + N_+ = \frac{A}{\lambda^2} [\log(1 + z e^{\beta \mu_m B}) + \log(1 + z e^{-\beta \mu_m B})]. \quad (5)$$

Pero la fugacidad en (4) está evaluada en $B = 0$, así que hay que despejarla de esta ecuación con $B = 0$,

$$N = 2 \frac{A}{\lambda^2} \log(1 + z). \quad (6)$$

El despeje es fácil,

$$z = e^{\lambda^2/2a} - 1, \quad (7)$$

donde $a = A/N$ es el área por partícula. Reemplazando en (4) obtenemos lo que se pide,

$$\chi = \mu_m^2 A \frac{4\pi m}{h^2} \frac{e^{\lambda^2/2a} - 1}{e^{\lambda^2/2a}} = \mu_m^2 A \frac{4\pi m}{h^2} (1 - e^{-\lambda^2/2a}). \quad (8)$$

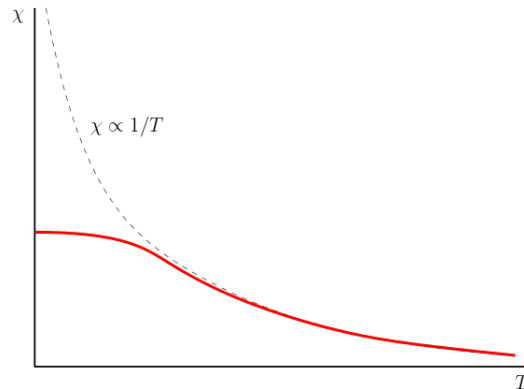
A temperaturas altas tenemos $\lambda^2/2a \ll 1$, de manera que $e^{-\lambda^2/2a} \simeq 1 - \lambda^2/2a$ y por lo tanto

$$\chi \simeq \mu_m^2 A \frac{4\pi m}{h^2} \frac{\lambda^2}{2a} = \frac{\mu_m^2 N}{kT} \quad (\text{temperaturas altas}). \quad (9)$$

Recuperamos, pues, la ley de Curie a temperaturas altas. A temperaturas bajas tenemos $\lambda^2/2a \gg 1$, con lo cual $e^{-\lambda^2/2a} \rightarrow 0$ y obtenemos

$$\chi \simeq \mu_m^2 A \frac{4\pi m}{h^2} \quad (\text{temperaturas bajas}). \quad (10)$$

Con todo esto, ya podemos hacer un buen gráfico cualitativo de la susceptibilidad en función de la temperatura.



Problema 2

Nota previa: en el enunciado del problema dice que la energía de las partículas en el agujero es $-gh$. En realidad esto es un typo, debería ser $-mgh$ (ésta es la energía potencial gravitatoria), pero en esta resolución nos vamos a ceñir al problema tal como está enunciado, es decir, aceptaremos que la energía de las partículas en el agujero es $-gh$.

(a) La fugacidad de un gas de bosones siempre cumple $z \leq e^{\beta\epsilon_{\min}}$, donde ϵ_{\min} es la mínima energía posible de una partícula. En este caso $\epsilon_{\min} = -gh$, así que

$$z \leq e^{-\beta gh}. \quad (11)$$

El número de partículas es la suma de las que están en el agujero y las que están sobre la mesa,

$$N = N_{\text{agujero}} + N_{\text{mesa}}. \quad (12)$$

Cada uno de estos números lo podemos calcular en función de la fugacidad usando la distribución de Bose-Einstein,

$$\begin{aligned} N_{\text{agujero}} &= \frac{1}{z^{-1}e^{-\beta gh} - 1} \\ N_{\text{mesa}} &= \int \frac{d^2p d^2q}{h^2} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} - 1}. \end{aligned} \quad (13)$$

La integral la podríamos calcular explícitamente, pero no hace falta porque es el número de partículas de toda la vida de un gas de spin cero en dos dimensiones,

$$N_{\text{mesa}} = \frac{A}{\lambda^2} g_1(z) = -\frac{A}{\lambda^2} \log(1 - z), \quad (14)$$

donde en el último paso hemos usado que $g_1(z) = -\log(1 - z)$. Nótese que esto es positivo, porque $1 - z < 1$, y que es una función creciente de z . Juntando todo respondemos a la segunda pregunta de este ítem,

$$N = \frac{1}{z^{-1}e^{-\beta gh} - 1} - \frac{A}{\lambda^2} \log(1 - z). \quad (15)$$

(b) Para $z < e^{-\beta gh}$ el número de partículas en el agujero es finito, con lo cual es despreciable frente a N y tenemos

$$N = -\frac{A}{\lambda^2} \log(1 - z) \quad z < e^{-\beta gh}. \quad (16)$$

En cambio, para $z = e^{-\beta gh}$ el número de partículas en el agujero diverge, así que ya no es más despreciable frente a N y tenemos

$$N = N_{\text{agujero}} - \frac{A}{\lambda^2} \log(1 - e^{-\beta gh}) \quad z = e^{-\beta gh}. \quad (17)$$

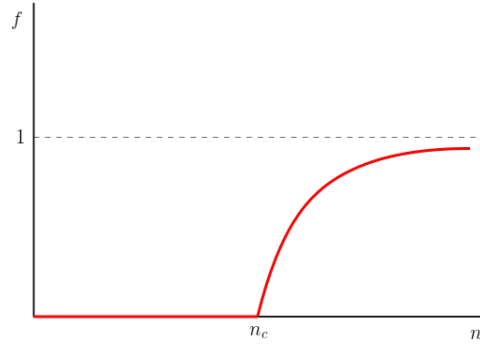
Dado que $-\log(1 - z)$ es una función creciente de z , en el primero de estos regímenes se tiene $n < -\lambda^{-2} \log(1 - e^{-\beta gh})$, y en el segundo es al revés. La densidad crítica n_c es la que marca la frontera entre ambos regímenes, así que

$$n_c = -\frac{1}{\lambda^2} \log(1 - e^{-\beta gh}). \quad (18)$$

Calculemos ahora la fracción de partículas en el agujero, $f = N_{\text{agujero}}/N$, en función de la densidad. Para densidades menores a la crítica ($z < e^{-\beta gh}$) esta fracción es cero porque N_{agujero} es finito, y para densidades mayores ($z = e^{-\beta gh}$) se despeja de (17), así que

$$f = \begin{cases} 0 & n < n_c \\ 1 - \frac{n_c}{n} & n > n_c, \end{cases} \quad (19)$$

donde hemos usado (18). El gráfico cualitativo de esta función es el siguiente.



(c) Para $n < n_c$ la fugacidad se despeja de (16), mientras que para $n > n_c$ es igual a $e^{-\beta gh}$, así que

$$z = \begin{cases} 1 - e^{-n\lambda^2} & n < n_c \\ e^{-\beta gh} & n > n_c. \end{cases} \quad (20)$$

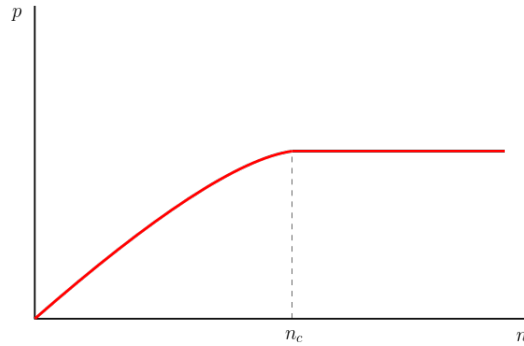
Teniendo en cuenta que las partículas en el agujero no hacen presión, y que las que están sobre la mesa forman un gas de spin cero de toda la vida en dos dimensiones, tenemos

$$p = \frac{kT}{A} \log Z_{\text{mesa}} = \frac{kT}{\lambda^2} g_2(z). \quad (21)$$

Reemplazando el resultado (20) en esta ecuación obtenemos

$$p = \begin{cases} \frac{kT}{\lambda^2} g_2(1 - e^{-n\lambda^2}) & n < n_c \\ \frac{kT}{\lambda^2} g_2(e^{-\beta gh}) & n > n_c. \end{cases} \quad (22)$$

Para graficar esto, fíjense que para densidades muy bajas tenemos $g_2(1 - e^{-n\lambda^2}) \simeq g_2(n\lambda^2) \simeq n\lambda^2$, de manera que en ese régimen la presión es la del gas ideal común, $p = nkT$, y por lo tanto lineal en la densidad. En cambio, para densidades mayores a la crítica la presión es independiente de la densidad. Así pues, el gráfico de la presión es más o menos como sigue.



Este gráfico tiene una interpretación linda. Si arrancamos con una densidad baja, a medida que vamos agregando partículas al sistema la presión aumenta (lo cual es intuitivo), pero cuando llegamos a la densidad crítica deja de aumentar porque las partículas que vamos agregando caen en el agujero.

Problema 3

(a) El sistema alcanza su mínima energía cuando todos los spines se encuentran en el mismo estado, porque en ese caso $\cos[\pi(n_i - n_{i+1})/2] = 1$, que es el máximo valor posible. Esa energía mínima es entonces

$$E_{\min} = -NJ. \quad (23)$$

Nótese que hay cuatro estados fundamentales: todos los spines con $n = 0$, o bien todos con $n = 1$, etc.

(b) Definiendo $K = \beta J$, la función de partición canónica es

$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_N} \prod_{i=1}^N e^{K \cos[\pi(n_i - n_{i+1})/2]}. \quad (24)$$

Si definimos la matriz de transferencia q por la ecuación

$$q_{nn'} = e^{K \cos[\pi(n - n')/2]}, \quad (25)$$

tenemos como de costumbre

$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_N} \prod_{i=1}^N q_{n_i n_{i+1}} = \sum_{n_1, \dots, n_N} q_{n_1 n_2} q_{n_2 n_3} \dots q_{n_N n_1} = \text{Tr } q^N. \quad (26)$$

La matriz de transferencia (25) es simétrica y por lo tanto diagonalizable. Nótese que es una matriz 4×4 , así que tiene cuatro autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Si λ_{\max} es el más grande de todos ellos tenemos

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \lambda_3^N + \lambda_4^N \simeq \lambda_{\max}^N. \quad (27)$$

Sólo nos falta, pues, determinar cuál es el máximo autovalor de la matriz de transferencia. Primero, escribámosla explícitamente,

$$q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^K & 1 & e^{-K} & 1 \\ 1 & e^K & 1 & e^{-K} \\ e^{-K} & 1 & e^K & 1 \\ 1 & e^{-K} & 1 & e^K \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Le pedimos a WolframAlpha que encuentre los autovalores y nos da

$$\lambda_1 = e^{-K}(e^K - 1)^2 \quad \lambda_2 = e^{-K}(e^K + 1)^2 \quad \lambda_3 = \lambda_4 = e^{-K}(e^{2K} - 1). \quad (29)$$

Está claro que el más grande de estos autovalores es el segundo, así que

$$\lambda_{\max} = e^{-K}(e^K + 1)^2 = (e^{K/2} + e^{-K/2})^2 = [2 \cosh(K/2)]^2. \quad (30)$$

Y ya está, reemplazando en (27) obtenemos la función de partición,

$$Z = [2 \cosh(K/2)]^{2N} = [2 \cosh(\beta J/2)]^{2N}. \quad (31)$$

(c) Para encontrar la energía simplemente tomamos la derivada adecuada,

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -2N \frac{\partial}{\partial \beta} \log[\cosh(\beta J/2)] = -NJ \tanh(\beta J/2). \quad (32)$$

A temperatura cero tenemos $\beta \rightarrow \infty$, así que la tangente hiperbólica tiende a 1 y la energía tiende a $-NJ$, que es la mínima energía posible del sistema tal como habíamos visto en el ítem (a).