

# Resolución primer recuperatorio Física Teórica 3

## 14/7/2021

### Problema 1

(a) Si  $N_{\uparrow}$  y  $N_{\downarrow}$  son respectivamente los números de partículas con spin hacia arriba y hacia abajo, tenemos

$$E = \epsilon(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \quad N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}, \quad (1)$$

y por lo tanto

$$N_{\uparrow} = \frac{N + E/\epsilon}{2} \quad N_{\downarrow} = \frac{N - E/\epsilon}{2}. \quad (2)$$

En el microcanónico, pues,  $N_{\uparrow}$  y  $N_{\downarrow}$  están fijos. Para especificar un microestado tenemos que decir cuáles son las  $N_{\uparrow}$  celdas ocupadas por partículas con spin up y cuáles las  $N_{\downarrow}$  celdas ocupadas por partículas con spin down. El número de formas de hacer eso es

$$\Omega = \binom{M}{N_{\uparrow}} \binom{M - N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = \frac{M!}{N_{\uparrow}! N_{\downarrow}! (M - N)!}. \quad (3)$$

Por lo tanto, la entropía usando Stirling es

$$S = k \log \Omega \\ = k [M \log M - N_{\uparrow} \log N_{\uparrow} - N_{\downarrow} \log N_{\downarrow} - (M - N) \log (M - N)], \quad (4)$$

lo cual, junto con (2), responde a la pregunta de este ítem.

(b) Para calcular  $E$  en función de  $T$ , primero calculamos  $T$  en función de  $E$ ,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{\partial S}{\partial N_{\uparrow}} - \frac{\partial S}{\partial N_{\downarrow}} \right) = -\frac{k}{2\epsilon} \log \frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = -\frac{k}{2\epsilon} \log \frac{1 + E/N\epsilon}{1 - E/N\epsilon}. \quad (5)$$

Exponenciando obtenemos

$$\frac{1 + E/N\epsilon}{1 - E/N\epsilon} = e^{-2\beta\epsilon}, \quad (6)$$

de donde despejamos la energía,

$$E = -N\epsilon \frac{e^{\beta\epsilon} - e^{-\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon}} = -N\epsilon \tanh(\beta\epsilon). \quad (7)$$

Calculemos ahora la presión,

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{k}{v} \log \frac{M}{M - N} = \frac{k}{v} \log \frac{1}{1 - N/M}. \quad (8)$$

Ya está, esta ecuación nos da la presión en función de la temperatura. En el régimen  $N \ll M$  tenemos

$$p \simeq \frac{kT}{v} \log(1 - N/M) \simeq \frac{kT}{v} \frac{N}{M} = \frac{NkT}{V}, \quad (9)$$

es decir, recuperamos la ecuación de estado del gas ideal.

(c) Si las partículas son distinguibles, eligiendo cuáles son las  $N_\uparrow$  celdas ocupadas por partículas con spin up y cuáles son las  $N_\downarrow$  celdas ocupadas por partículas con spin down aún no hemos especificado el microestado. Falta agregar a cada celda ocupada un numerito, que indica cuál es la partícula que ocupa esa celda. Tenemos  $N!$  formas de hacer eso, así que

$$\Omega_{\text{dist}} = \Omega_{\text{ind}} N! \quad (10)$$

y por lo tanto

$$S_{\text{dist}} = S_{\text{ind}} + N \log N - N. \quad (11)$$

Otra forma de llegar a la ecuación (10) es la siguiente. Para especificar un microestado, primero tengo que elegir cuáles son las  $N_\uparrow$  partículas con spin up (lo cual automáticamente determina cuáles son las  $N_\downarrow$  partículas con spin down) y, una vez hecho eso, colocar cada partícula en una celda. El número de formas de hacer eso es

$$\Omega_{\text{dist}} = \binom{N}{N_\uparrow} M(M-1) \dots (M-N+1) = \frac{N!}{N_\uparrow! N_\downarrow!} \frac{M!}{(M-N)!}. \quad (12)$$

Comparando con (3), vemos que este resultado es exactamente lo mismo que (10).

## Problema 2

(a) Como las partículas del sólido son distinguibles, tenemos

$$Z_s = Z_{1s}^{N_s} \quad (13)$$

donde  $N_s$  es el número de partículas del sólido y

$$\begin{aligned} Z_{1s} &= \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} e^{-\beta(p^2/2m + m\omega^2 q^2/2)} \\ &= \frac{1}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2} \left( \frac{2\pi kT}{m\omega^2} \right)^{3/2} \\ &= \left( \frac{2\pi kT}{h\omega} \right)^3 = \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Para el gas tenemos

$$Z_g = \frac{1}{N_g!} Z_{1g}^{N_g}, \quad (15)$$

donde  $N_g$  es el número de partículas del gas y

$$Z_{1g} = \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} e^{-\beta(p^2/2m + \epsilon_0)} = e^{-\beta\epsilon_0} \frac{V_g}{\lambda^3}, \quad (16)$$

donde  $V_g$  es el volumen del gas.

(b) La condición que expresa el equilibrio entre sólido y gas es la igualdad de potenciales químicos,  $\mu_s = \mu_g$ . El potencial químico se calcula a partir de la función de partición por la ecuación

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -kT \frac{\partial}{\partial N} \log Z. \quad (17)$$

Así pues, el potencial químico del sólido es

$$\mu_s = -kT \log Z_{1s} = -kT \log \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3, \quad (18)$$

y el del gas es

$$\mu_g = -kT \log \left( \frac{Z_{1g}}{N_g} \right) = -kT \log \frac{e^{-\beta\epsilon_0}}{n_g \lambda^3}. \quad (19)$$

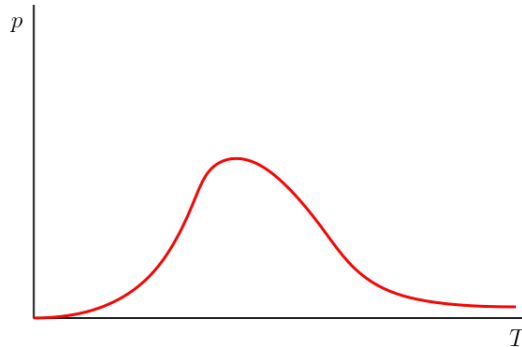
Igualando ambos potenciales químicos obtenemos pues

$$n_g = \left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right)^3 \frac{e^{-\beta\epsilon_0}}{\lambda^3} = \left( \frac{m\omega^2}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta\epsilon_0}. \quad (20)$$

El gas es un gas ideal, así que su presión está dada por la ecuación de estado del gas ideal,

$$p = n_g kT = \left( \frac{m\omega^2}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{kT}} e^{-\epsilon_0/kT}. \quad (21)$$

La presión tiende a 0 cuando la temperatura va a 0 y también cuando va a  $\infty$ , así que cualitativamente tiene esta pinta.



(c) Se trata simplemente de encontrar el máximo de la presión, porque para temperaturas inferiores la pendiente es positiva. Lo haremos tomando  $\beta$  como variable en lugar de la temperatura, que es un poco más fácil:

$$0 = p'(\beta) = \left(\frac{m\omega^2}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}} - \epsilon_0\sqrt{\beta}\right). \quad (22)$$

Por lo tanto, el máximo está en  $\beta = 1/2\epsilon_0$  o, lo que es lo mismo,

$$T = 2\epsilon_0/k. \quad (23)$$

Ésta es la máxima temperatura a la que el sólido y el gas pueden coexistir en equilibrio.

### Problema 3

(a) Determinamos  $\alpha$  imponiendo que la integral en los momentos de la función de distribución sea la densidad,

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \int d^3p f(\vec{p}) = 4\pi\alpha \int_0^\infty dp p^2 e^{-\beta cp} \\ &= 4\pi\alpha \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} = 8\pi\alpha \left(\frac{kT}{c}\right)^3, \end{aligned} \quad (24)$$

de donde sacamos

$$\alpha = \frac{N}{8\pi V} \left(\frac{c}{kT}\right)^3. \quad (25)$$

La energía total del gas es la densidad de energía multiplicada por el volumen,

$$\begin{aligned} E &= V \int d^3p c p f(\vec{p}) = 4\pi V c \alpha \int_0^\infty dp p^3 e^{-\beta cp} \\ &= 4\pi V c \alpha \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \int_0^\infty dx x^3 e^{-x} = 24\pi V c \alpha \left(\frac{kT}{c}\right)^4 \\ &= 3NkT. \end{aligned} \quad (26)$$

(b) Calculemos primero el flujo  $\Phi$  de partículas. Eligiendo los ejes de forma que el vector normal al agujero sea  $\hat{z}$  tenemos

$$\begin{aligned} \Phi &= \vec{j} \cdot \hat{z} = nc \langle \hat{p} \cdot \hat{z} \rangle = c \int d^3p \hat{p} \cdot \hat{z} f(\vec{p}) \\ &= 2\pi c \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^\infty dp p^2 f(p) \\ &= \frac{c}{2} \frac{N}{V} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{c}{2} \frac{N}{V} \int_0^1 dx x = \frac{c}{4} \frac{N}{V}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde en el paso de la segunda línea a la tercera hemos usado que la integral en  $p$  que aparece al final de la segunda línea es la densidad de partículas dividido  $4\pi$ , y en el paso de la tercera línea a la cuarta hemos hecho el cambio de variables  $x = \cos\theta$ . La integral en  $\theta$  va hasta  $\pi/2$  porque no hay partículas entrantes, sólo salientes. A partir de este resultado obtenemos inmediatamente la derivada temporal del número de partículas,

$$\dot{N} = -\Phi a = -\frac{ac}{4V}N. \quad (28)$$

Recuerden el tema de los signos:  $\Phi a$  es el número de partículas que escapan por unidad de tiempo, y  $\dot{N}$  es menos ese número. Nótese que, precisamente porque el número de partículas que escapan es positivo,  $N$  disminuye y por lo tanto  $\dot{N}$  es negativo. Vamos ahora con el flujo de energía,

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon &= \vec{j}_\epsilon \cdot \hat{z} = nc \langle \epsilon \hat{p} \cdot \hat{z} \rangle = c \int d^3p \, cp \hat{p} \cdot \hat{z} f(\vec{p}) \\ &= 2\pi c \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta \int_0^\infty dp \, p^2 \, cp f(p) \\ &= \frac{c}{2} \frac{E}{V} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = \frac{c}{4} \frac{E}{V}, \end{aligned} \quad (29)$$

donde, de vuelta, en el paso de la segunda línea a la tercera hemos usado que la integral en  $p$  que aparece al final de la segunda línea es la densidad de energía dividido  $4\pi$ . Y con esto ya sacamos la derivada temporal de la energía,

$$\dot{E} = -\Phi_\epsilon a = -\frac{ac}{4V}E = -3\frac{ac}{4V}NkT. \quad (30)$$

(c) Comparando las ecuaciones (28) y (30) vemos que

$$\dot{E} = 3\dot{N}kT, \quad (31)$$

lo cual implica que la temperatura es constante,

$$\dot{T} = 0. \quad (32)$$