Primer recuperatorio de Física Teórica 3
14/7/2021

Problema 1

Considere un recipiente dividido en M celdas de volumen v, que contiene $N \leq M$ partículas indistinguibles de spin 1/2. Cada celda puede contener como máximo una partícula; si la celda está desocupada tiene energía 0, y si está ocupada tiene energía $\pm\epsilon$ según si el spin de la partícula apunta hacia arriba o hacia abajo.

(a) Calcule la entropía del sistema en función de su energía en el ensamble microcanónico.

(b) A partir de lo anterior, obtenga la energía y la presión del sistema en función de su temperatura. ¿Qué forma tiene la presión en el régimen $N \ll M$?

(c) Repita el ítem (a) suponiendo ahora que las partículas son distinguibles.

Problema 2

Considere una sustancia formada por partículas de masa m. A temperaturas lo bastante bajas, las fases sólida y gaseosa de esta sustancia pueden coexistir en equilibrio. Modelaremos la fase sólida como un sistema de osciladores armónicos distinguibles y no interactuantes de frecuencia ω, de manera que la energía de una partícula en la fase sólida es

$$\epsilon_s(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{q}^2.$$

La fase gaseosa la modelaremos como un gas ideal (indistinguibilidad aproximada mediante el conteo de Boltzmann) con energías monoparticulares

$$\epsilon_g(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \epsilon_0,$$

donde ϵ_0 es una constante positiva que introducimos para que los estados de más baja energía correspondan a la fase sólida. El sistema (sólido+gas) se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule la función de partición canónica del sólido en función de su número de partículas, y también la del gas en función de su número de partículas y su volumen.

(b) Teniendo en cuenta que el sólido y el gas pueden intercambiar partículas, ¿cuál es la condición que expresa el hecho de que están en equilibrio entre sí? A partir de esa condición, calcule la densidad de partículas del gas, y de ahí obtenga su presión. Grafique cualitativamente la presión en función de la temperatura (curva de coexistencia de las fases sólida y gaseosa).

(c) La curva de coexistencia debería tener pendiente positiva. Teniendo esto en cuenta, determine la máxima temperatura a la cual las fases sólida y gaseosa pueden coexistir en equilibrio.

Problema 3

Un gas diluido formado por N partículas ultrarrelativistas (es decir, tales que la energía de una partícula de momento $\vec{p}$ es cp, donde c es la velocidad de la luz), está contenido en un recipiente de volumen V. El gas está en equilibrio a temperatura T, así que su función de distribución es la de Maxwell-Boltzmann para el caso ultrarrelativista,

$$f(\vec{p}) = \alpha \exp\left(-\frac{cp}{kT}\right),$$

donde α es una constante.

(a) Determine el valor de α. Calcule la energía total E del gas.

(b) Si se practica un pequeño agujero de área a en una de las paredes del recipiente, calcule las derivadas temporales $\dot{N}$ y $\dot{E}$.
Ayuda: la densidad de corriente de una cantidad $\chi(\vec{r}, \vec{p})$ es proporcional a $\langle \chi \vec{v} \rangle$, donde $\vec{v}(\vec{p})$ es la velocidad de una partícula de momento $\vec{p}$. En el caso ultrarrelativista esta velocidad no es $\vec{p}/m$ (como en el caso no-relativista) sino $c\hat{p}$, donde $\hat{p} = \vec{p}/p$ es el versor que apunta en la dirección de $\vec{p}$.

(c) A partir de lo anterior, calcule la derivada temporal de la temperatura.

Una integral útil: $\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$.