Segundo recuperatorio de Física Teórica 3 19/7/2021

Problema 1

Un recipiente de volumen V está dividido en dos compartimentos por un tabique impermeable y móvil. En cada uno de los compartimentos hay un gas de N fermiones ultrarrelativistas (energías monoparticulares $\epsilon(\vec{p}) = cp$, donde c es la velocidad de la luz); las partículas del compartimento 1 tienen spin s_1, y las del compartimento 2 tienen spin s_2. El sistema se encuentra en contacto con un reservorio a temperatura 0.

(a) Calcule la presión de cada uno de los gases en función de su volumen.
Ayuda: como el gas es ultrarrelativista, no vale la relación universal entre energía, presión y volumen que habíamos obtenido en el caso no-relativista.

(b) Calcule el volumen de cada gas en el equilibrio.

(c) ¿Cómo cambiaría el resultado del ítem anterior si la temperatura del reservorio fuera mucho mayor a la de Fermi de cada gas?

Problema 2

Considere un gas bidimensional de partículas de masa m y spin 0. Los estados monoparticulares están caracterizados como de costumbre por posición y momento, pero su energía está corrida para arriba,

$$\epsilon(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \epsilon_0,$$

donde ϵ_0 es una constante positiva. Además de todos estos estados, hay un estado monoparticular extra de energía 0. El gas está contenido en un recipiente de área A y se encuentra en equilibrio a temperatura T, que vamos a mantener constante. Se pide trabajar en el límite termodinámico.

(a) Calcule el logaritmo de la función de partición grancanónica en función de la fugacidad, y a partir de ahí obtenga el número de partículas N y la energía E del gas, también en función de la fugacidad.

(b) Calcule el valor crítico n_c de la densidad $n = N/A$ por arriba del cual la fracción f de partículas en el estado fundamental es no nula. Calcule f en función de n, y grafíquela cualitativamente.

(c) Calcule la energía por partícula E/N en función de n, y grafíquela cualitativamente.

Problema 3

Considere una red de N spines, el estado de cada uno de los cuales es un vector unitario $\vec{s}$ que puede apuntar en cualquier dirección del espacio. El hamiltoniano del sistema es

$$H(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_N) = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

donde la suma es sobre pares de primeros vecinos y J es una constante positiva. El número de primeros vecinos de cada sitio de la red es γ.

(a) Escriba el hamiltoniano de un spin en la aproximación de campo medio, en términos de la magnetización $\vec{m} = \langle \vec{s}_i \rangle$.

(b) Calcule la función de partición canónica de un spin en términos de $\vec{m}$.
Ayuda: en este caso la suma sobre estados es una integral en el ángulo sólido, y no hay que dividir por ninguna potencia de h porque la variable de integración es adimensional.

(c) Obtenga la ecuación de autoconsistencia para $\vec{m}$.
Ayuda: recuerde que $\nabla_{\vec{r}} f(r) = f'(r)\hat{r}$.

(d) Calcule la temperatura crítica por debajo de la cual el sistema se magnetiza espontáneamente.
Ayuda: $\coth x = 1/x + x/3 + \mathcal{O}(x^3)$.