

Resolución 2^o recuperatorio Física Teórica 3 19/7/2021

Problema 1

(a) Este ítem se puede resolver de dos maneras, una muy sencilla pero algo imaginativa, y otra más mecánica pero también más cuentosa. Empezamos con la manera sencilla: la presión se obtiene derivando Helmholtz, pero a temperatura cero Helmholtz es igual a la energía, $F = E - TS = E$, así que

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{\partial E}{\partial V}. \quad (1)$$

Bueno, calculemos la energía,

$$E = g_s \int_{cp < \epsilon_F} \frac{d^3p d^3q}{h^3} cp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi c \int_0^{\epsilon_F/c} dp p^3 = g_s \frac{V}{h^3} \pi c \left(\frac{\epsilon_F}{c}\right)^4. \quad (2)$$

Necesitamos la energía de Fermi. Calculemosla,

$$N = g_s \int_{cp < \epsilon_F} \frac{d^3p d^3q}{h^3} = g_s \frac{V}{h^3} \int_{p < \epsilon_F/c} d^3p = g_s \frac{V}{h^3} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\epsilon_F}{c}\right)^3. \quad (3)$$

En el último paso simplemente hemos notado que la integral que nos quedaba es el volumen de una esfera de radio ϵ_F/c . De esta ecuación despejamos la energía de Fermi,

$$\epsilon_F = hc \left(\frac{3}{4\pi g_s} \frac{N}{V}\right)^{1/3}, \quad (4)$$

y comparando (2) y (3) podemos reescribir la energía de forma más sencilla,

$$E = \frac{3}{4} N \epsilon_F. \quad (5)$$

Y ahora sacar la presión es un momento,

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{3}{4} N \frac{\partial \epsilon_F}{\partial V} = \frac{N \epsilon_F}{4V}. \quad (6)$$

Ya está, esta ecuación junto con (4) nos da la presión de un gas ultrarrelativista a temperatura cero. La presión de cada uno de nuestros dos gases se obtiene reemplazando s, V por s_1, V_1 y s_2, V_2 .

Vamos ahora con la manera más mecánica y cuentosa. Calculamos la función

de partición,

$$\begin{aligned}
\log Z &= g_s \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \log(1 + ze^{-\beta cp}) \\
&= g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty dp p^2 \log(1 + ze^{-\beta cp}) \\
&= g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \int_0^\infty dx x^2 \log(1 + ze^{-x}) \\
&= g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \frac{1}{3} \left[x^3 \log(1 + ze^{-x}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dx \frac{x^3 ze^{-x}}{1 + ze^{-x}} \right] \\
&= g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \frac{1}{3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{z^{-1}e^x + 1} \\
&= g_s \frac{V}{h^3} 8\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3 f_4(z), \tag{7}
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que $\Gamma(4) = 3! = 6$. La presión es

$$p = \frac{kT}{V} \log Z = g_s 8\pi \frac{(kT)^4}{(hc)^3} f_4(z). \tag{8}$$

Para determinar la presión a temperatura cero, recordamos que temperaturas bajas corresponden a fugacidades altas y, consecuentemente, expandimos f_4 al orden más bajo en Sommerfeld,

$$p = g_s 8\pi \frac{(kT)^4 (\log z)^4}{(hc)^3 4!} = g_s \frac{\pi}{3} \frac{\epsilon_F^4}{(hc)^3}. \tag{9}$$

La energía de Fermi ya la calculamos por el otro método, pero la vamos a volver a calcular mediante el método que estamos usando ahora. El número de partículas se obtiene derivando la función de partición,

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z = g_s \frac{V}{h^3} 8\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3 f_3(z). \tag{10}$$

Aplicando Sommerfeld de vuelta obtenemos

$$N = g_s 8\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \frac{\log z}{3!} = g_s \frac{4}{3} \pi V \left(\frac{\epsilon_F}{hc}\right)^3. \tag{11}$$

Esta es la misma ecuación que (3), así que de acá despejamos exactamente el mismo resultado que antes para la energía de Fermi, ecuación (4). Comparando las ecuaciones (9) y (11) recuperamos exactamente el mismo resultado de antes para la presión, ecuación (6).

(b) En el equilibrio se igualan las presiones, $p_1 = p_2$. Como los números de partículas son iguales, esto es equivalente a

$$\frac{\epsilon_{F1}}{V_1} = \frac{\epsilon_{F2}}{V_2}. \tag{12}$$

Usando nuestra expresión explícita para la energía de Fermi, ecuación (4), esta ecuación toma la forma

$$\frac{1}{g_{s_1}^{1/3} V_1^{4/3}} = \frac{1}{g_{s_2}^{1/3} V_2^{4/3}}, \quad (13)$$

de donde sacamos

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{g_{s_1}}{g_{s_2}} \right)^{1/4}. \quad (14)$$

Todavía no hemos terminado porque nos piden el volumen de cada gas, y esta ecuación sólo nos da el ratio entre ambos volúmenes. Bueno, usemos el dato del volumen total,

$$V = V_1 + V_2 = V_1 \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \right) = V_1 \left[1 + \left(\frac{g_{s_1}}{g_{s_2}} \right)^{1/4} \right]. \quad (15)$$

Ahora sí, de acá despejamos el volumen del primer gas,

$$V_1 = \frac{V}{1 + \left(\frac{g_{s_1}}{g_{s_2}} \right)^{1/4}}, \quad (16)$$

y de ahí sacamos el del segundo,

$$V_2 = \left(\frac{g_{s_1}}{g_{s_2}} \right)^{1/4} V_1 = \frac{V}{1 + \left(\frac{g_{s_2}}{g_{s_1}} \right)^{1/4}}, \quad (17)$$

lo cual cierra este ítem.

(c) En el régimen de temperaturas altas, la ecuación de estado es la del gas ideal común, aunque las partículas sean ultrarrelativistas. Esto lo podemos recordar de la guía 3, o lo podemos rededucir fácilmente: a temperaturas altas tenemos $z \ll 1$ y por lo tanto $f_\nu(z) \simeq z$. Comparando las ecuaciones (7) y (10), vemos que en ese caso $\log Z = N$, y reemplazando esto en la primera igualdad de (8) obtenemos la ecuación de estado del gas ideal, $p = NkT/V$. La presión, entonces, no depende del spin, y por lo tanto en el equilibrio los volúmenes de ambos gases son iguales.

Problema 2

(a) El logaritmo de la función de partición canónica es una suma sobre estados monoparticulares. Podemos escribir esa suma como la contribución del fundamental (que es el estado extra) más la de los excitados,

$$\log Z = \log Z_0 + \log Z_{\text{exc}}. \quad (18)$$

Cada uno de estos términos es

$$\begin{aligned}\log Z_0 &= -\log(1-z) \\ \log Z_{\text{exc}} &= -\int \frac{d^2p d^2q}{h^2} \log\left(1 - ze^{-\beta\epsilon_0} e^{-\beta p^2/2m}\right).\end{aligned}\quad (19)$$

Podríamos calcular la integral explícitamente, pero no hace falta: es el logaritmo de la función de partición grancanónica de un gas bidimensional de toda la vida, sólo que evaluada en una fugacidad $ze^{-\beta\epsilon_0}$,

$$\log Z_{\text{exc}} = \frac{A}{\lambda^2} g_2(ze^{-\beta\epsilon_0}). \quad (20)$$

Juntando todo obtenemos la función de partición de nuestro sistema,

$$\log Z = -\log(1-z) + \frac{A}{\lambda^2} g_2(ze^{-\beta\epsilon_0}). \quad (21)$$

El número de partículas se escribe también como la contribución del fundamental más la de los excitados,

$$N = N_0 + N_{\text{exc}}. \quad (22)$$

Cada uno de estos términos es la derivada respecto a z de la contribución correspondiente a la función de partición,

$$\begin{aligned}N_0 &= z \frac{\partial}{\partial z} \log Z_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} \\ N_{\text{exc}} &= z \frac{\partial}{\partial z} \log Z_{\text{exc}} = \frac{A}{\lambda^2} g_1(ze^{-\beta\epsilon_0}) = -\frac{A}{\lambda^2} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}),\end{aligned}\quad (23)$$

donde en el último paso hemos usado que $g_1(z) = -\log(1-z)$. Juntando todo obtenemos el número de partículas,

$$N = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{A}{\lambda^2} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}). \quad (24)$$

Por último calculamos la energía,

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = kT \frac{A}{\lambda^2} g_2(ze^{-\beta\epsilon_0}) - \frac{A}{\lambda^2} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) \epsilon_0. \quad (25)$$

(b) Para $z < 1$ el número de partículas en el fundamental es finito y por lo tanto despreciable frente a N , así que

$$N = -\frac{A}{\lambda^2} \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) \quad (z < 1). \quad (26)$$

En cambio, para $z = 1$ el número de partículas en el fundamental diverge y en consecuencia ya no es despreciable frente a N ,

$$N = N_0 - \frac{A}{\lambda^2} \log(1 - e^{-\beta\epsilon_0}) \quad (z = 1). \quad (27)$$

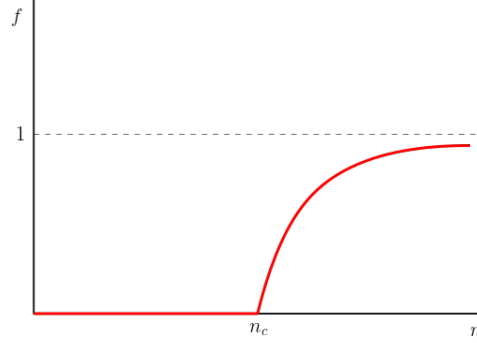
Dado que $-\log(1-x)$ es una función creciente de x , en el primero de estos regímenes tenemos $n < -\lambda^{-2} \log(1 - e^{-\beta\epsilon_0})$, y en el segundo es al revés. La densidad crítica n_c es la que marca la frontera entre ambos regímenes, así que

$$n_c = -\frac{1}{\lambda^2} \log(1 - e^{-\beta\epsilon_0}). \quad (28)$$

Nótese entonces que $z < 1$ corresponde a $n < n_c$ y $z = 1$ corresponde a $n > n_c$. Para densidades menores a la crítica la fracción de partículas en el fundamental se anula, y para densidades mayores se despeja de (27), así que

$$f = \begin{cases} 0 & n < n_c \\ 1 - \frac{n_c}{n} & n > n_c, \end{cases} \quad (29)$$

donde hemos usado (28). El gráfico de f es como sigue.



(c) Para densidades menores a la crítica ($z < 1$), dividiendo la energía (25) por N y usando (26) obtenemos

$$\frac{E}{N} = \frac{kT}{n\lambda^2} g_2(ze^{-\beta\epsilon_0}) + \epsilon_0 \quad (n < n_c). \quad (30)$$

Falta expresar z en función de n , lo cual hacemos usando (26) otra vez,

$$ze^{-\beta\epsilon_0} = 1 - e^{-n\lambda^2} \quad (n < n_c). \quad (31)$$

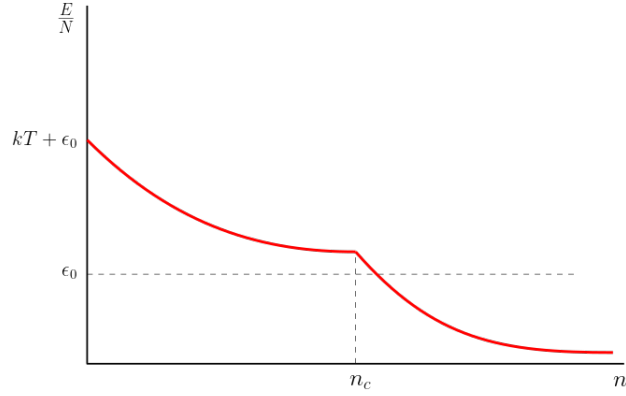
Reemplazando en (30) obtenemos lo que se pide,

$$\frac{E}{N} = \frac{kT}{n\lambda^2} g_2(1 - e^{-n\lambda^2}) + \epsilon_0 \quad (n < n_c). \quad (32)$$

Para densidades mayores a la crítica ($z = 1$) la ecuación (25) dividida por N da

$$\frac{E}{N} = \frac{kT}{n\lambda^2} g_2(e^{-\beta\epsilon_0}) + \frac{n_c}{n} \epsilon_0 \quad (n > n_c). \quad (33)$$

Y ya está, ya tenemos la energía por partícula en función de la densidad. Para graficarla, notemos primero que para densidades muy bajas $g_2(1 - e^{-n\lambda^2}) \simeq g_2(n\lambda^2) \simeq n\lambda^2$, de manera que en el límite $n \rightarrow 0$ la energía por partícula tiende a $kT + \epsilon_0$. Si nos pudiéramos seguir creyendo la ecuación (32) para densidades arbitrariamente altas obtendríamos $E/N \rightarrow \epsilon_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero a partir de la densidad crítica la energía por partícula empieza a decaer a cero como $1/n$. Por lo tanto, el gráfico es más o menos como sigue.



Problema 3

(a) La parte del hamiltoniano que involucra un spin dado, llamémosle \vec{s} , es $H_1 = -J\vec{s} \cdot \sum_{i=1}^{\gamma} \vec{s}_i$. La aproximación de campo medio consiste en reemplazar todos los spines vecinos por la magnetización, es decir,

$$H_1 \simeq -J\gamma\vec{m} \cdot \vec{s}. \quad (34)$$

(b) Los estados de nuestro spin son vectores unitarios que pueden apuntar en cualquier dirección del espacio, así que la función de partición canónica es una integral en el ángulo sólido,

$$Z_1 = \int d\Omega e^{\beta J\gamma\vec{m} \cdot \vec{s}}. \quad (35)$$

Si tomamos el ángulo polar θ como el ángulo con la dirección de \vec{m} tenemos $\vec{m} \cdot \vec{s} = m \cos \theta$ y la integral se calcula fácilmente,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{\beta J\gamma m \cos \theta} = 2\pi \int_{-1}^1 dx e^{\beta J\gamma m x} \\ &= \frac{2\pi}{\beta J\gamma m} (e^{\beta J\gamma m} - e^{-\beta J\gamma m}) = 4\pi \frac{\sinh(\beta J\gamma m)}{\beta J\gamma m}. \end{aligned} \quad (36)$$

(c) De la ecuación (35) vemos que

$$\vec{m} = \langle \vec{s} \rangle = \frac{1}{\beta J\gamma} \nabla_{\vec{m}} \log Z_1. \quad (37)$$

Como Z_1 sólo depende del módulo de la magnetización, usando la ayuda del enunciado obtenemos

$$m = \frac{1}{\beta J \gamma} \frac{\partial}{\partial m} \log Z_1 = \coth(\beta J \gamma m) - \frac{1}{\beta J \gamma m} \equiv f(T, m). \quad (38)$$

(d) La temperatura crítica T_c está determinada por la ecuación

$$\left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{T=T_c, m=0} = 1. \quad (39)$$

Usando la ayuda del enunciado, podemos reescribir f como

$$f(T, m) = \frac{\beta J \gamma m}{3} + \mathcal{O}(m^3), \quad (40)$$

así que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial m} \right|_{m=0} = \frac{\beta J \gamma}{3}. \quad (41)$$

Comparando con (39) vemos que la temperatura crítica está dada por $\beta_c J \gamma / 3 = 1$ o, lo que es lo mismo,

$$T_c = \frac{J \gamma}{3k}. \quad (42)$$