Física Teórica 3 − 2do cuatrimestre de 2021

Guía 10: *Teoría de Landau*

1. La energía libre de Landau para un ferromagneto en ausencia de campo magnético externo, es:

$$f(m,T) = a(T)m^2 + \frac{b(T)}{2}m^4$$

   (a) Es de esperar que m sea nula para $T > T_c$, y finita para $T < T_C$. ¿Qué condiciones deben cumplir $a(T)$ y $b(T)$ para que dicho comportamiento se cumpla?

   (b) Sea $a(T) = a_0(T - T_c)$, $a_0 > 0$ y $b(T) = b =$ cte > 0. En las cercanías de una transición de fase valen las siguientes relaciones de *scaling*:

$$\begin{aligned} m(T) &\sim (T_c - T)^{\beta}(h = 0, T < T_C) \\ c_V &\sim |T - T_C|^{-\alpha}(h = 0) \\ \xi(T) &= \partial_h m|_h = 0 \sim |T - T_C|^{-\gamma}(h = 0) \\ m(h) &\sim h^{1/\delta}(T = T_C) \end{aligned}$$

   Calcule los exponentes críticos α, β, γ y δ para este modelo.

2. Considere un sistema cuya energía libre de Landau es:

$$f(m,t) = q(t) + r(t)m^2 + s(t)m^4 + n(t)m^6$$

donde $n(t)$ es una constante positiva fija. Minimice f con respecto a m y examine la magnetización espontánea m_0 como función de los parámetros r y s. En particular muestre que

   (a) Para $r > 0$ y $s > -(3nr)^{1/2}$, $m_0 = 0$ es la única solución real.

   (b) Para $r > 0$ y $-(4nr)^{1/2} < s-(3nr)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $m_0 = \pm m_1$, donde

$$m_1^2 = \frac{\sqrt{s^2 - 3nr} - s}{3n}$$

   Sin embargo, dado que el mínimo de f en $m_0 = 0$ es menor que los mínimos en $m_0 = \pm m_1$, la situación de equilibrio corresponde al caso $m_0 = 0$.

   (c) Para $r > 0$ y $s = -(4nr)^{1/2}$ es $m_0 = 0$ y $m_1 = \pm(r/n)^{1/4}$. Ahora, el mínimo de f en $m_0 = 0$ coincide con los correspondientes a $m_1 = \pm(r/n)^{1/4}$, de modo tal que es igualmente probable tener magnetización espontánea como magnetización nula.

   (d) Para $r > 0$ y $s < -(4nr)^{1/2}$ es $m_0 = \pm m_1$, lo que implica una transición de fase de primer orden (los dos estados disponibles difieren en un valor finito de m). La línea $s = -(4nr)^{1/2}$ con $r > 0$ se denomina "línea de transición de fase de primer orden".

   (e) Para $r = 0$ y $s < 0$, $m_0 = \pm(2|s|/3n)^{1/2}$.

   (f) Para $r < 0$, $m_0 = \pm m_1$ para todo s. Cuando $r \to 0, m_1 \to 0$ si $s > 0$.

(g) Para $r = 0$ y $s > 0$, $m_0 = 0$ es la única solución. Combinando este resultado con el del punto anterior, concluya que la linea $r = 0$, con $s > 0$ es una linea de transiciones de fase de segundo orden.

Las lineas de primer y segundo orden se encuentran en el punto $r = s = 0$, que es el denominado punto tricrítico.

3. Según la teoría de Guinzburg-Landau, la siguiente es una expresión válida para la energía libre asociada a materiales superconductores:

$$F[\psi(x), T] = \int d^3r\{f_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2 + a(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4\}$$

La cantidad $|\psi|^2$ es proporcional a la densidad de partículas superconductoras del gas de electrones. Encuentre la configuración del parámetro de orden $\psi(\vec{r})$ para el caso en el que el material está contenido en el semiespacio $x > 0$ y que la densidad se anula en el plano $x = 0$.