Física Teórica 3 − 1er cuatrimestre de 2022

Guía 4: *Teoría cinética − Ecuación de Boltzmann*

1. Considere un gas clásico de partículas de masa m descripto por la función de distribución de una partícula $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$, y sea $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ una magnitud asociada a cada partícula del gas.

   (a) Si se usa la variable $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/m$, ¿cuál es, en términos de f, la función de distribución adecuada?

   (b) Escribir la densidad de χ en el punto $\boldsymbol{r}$ a tiempo t, $\rho_\chi(\boldsymbol{r},t)$, en términos de f. ¿Cuál es la función $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ cuya densidad es la densidad de partículas $n(\boldsymbol{r},t)$?

   (c) Escribir el valor medio de χ en $\boldsymbol{r}$ y t, $\langle\chi\rangle(\boldsymbol{r},t)$, en términos de f. En particular, escribir la expresión integral que define la velocidad media $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$.

   (d) Se define la temperatura $T(\boldsymbol{r},t)$ mediante la ecuación $\langle(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2/2m\rangle=(3/2)kT$, por analogía con lo que ocurre en equilibrio (teorema de equipartición). Escribir la temperatura en términos de f.

   El flujo de χ a través de un elemento de área con vector normal $\boldsymbol{n}$ siempre puede escribirse en la forma $\Phi_\chi=\boldsymbol{j}_\chi\cdot\boldsymbol{n}$. El vector $\boldsymbol{j}_\chi$ se conoce como la densidad de corriente de χ.

   e) Escribir $\boldsymbol{j}_\chi(\boldsymbol{r},t)$ en términos de f suponiendo que el elemento de área se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$.

   Usualmente se consideran dos casos: $\boldsymbol{v}$ igual a la velocidad media del gas, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$, o $\boldsymbol{v}=0$. Como casos particulares, escribir las expresiones para:

   f) La densidad de corriente de partículas, $\boldsymbol{j}$. Aquí se toma $\boldsymbol{v}=0$. Relacionar el resultado con $\boldsymbol{u}$ y n.

   g) La densidad de corriente de calor, $\boldsymbol{q}$, definida como la densidad de corriente de energía cinética medida en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad local del gas. Es decir, se toma $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$, pero además se calcula la energía en el sistema de referencia en el que el gas está localmente en reposo, $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t))^2/2m$.

   h) El tensor de presión P_{ij}, es decir, la componente j de la densidad de corriente de la componente i del impulso, medida en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad local del gas: $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=p_i-mu_i(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$.

2. Si una cantidad $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ asociada a cada partícula se conserva en colisiones binarias, es decir, si $\chi_1'+\chi_2'=\chi_1+\chi_2$, entonces es posible deducir leyes de conservación para las soluciones de la ecuación de Boltzmann. La forma de estas leyes es (Huang § 5.3)

$$\int d^3p\,\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{p}{m}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}f+\boldsymbol{F}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}f\right)=0.$$

(a) Demostrar que, para $\chi = 1$, $\chi = p_i$ y $\chi = (\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{u})^2/2m$, resultan las siguientes ecuaciones de conservación asumiendo que $\boldsymbol{F}$ no depende del impulso:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0 \\
&m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\right) u_i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i \\
&\frac{3}{2}k\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\right) T = -\frac{1}{n}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}$$

Interprete físicamente cada una de estas ecuaciones. ¿Son suficientes para determinar n, $\boldsymbol{u}$ y T?

(b) Estudiar cómo cambian las ecuaciones de arriba en el caso en que $\boldsymbol{F}$ es la fuerza de Lorentz, $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{p}/m) \times \boldsymbol{B}]$ (que sí depende del impulso).

3. Una solución f de la ecuación de Boltzmann se dice de equilibrio si satisface $\partial f/\partial t = 0$ y, además, para toda colisión binaria $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \to \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2$ se tiene

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}'_1)f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}'_2) = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}_1)f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}_2).$$

Esta última condición se conoce como condición de balance detallado. Pruebe que, en ausencia de fuerzas externas, la distribución de equilibrio más general es la de Maxwell-Boltzmann

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p - m\boldsymbol{u})^2}{2mkT}\right],$$

donde n, $\boldsymbol{u}$ y T son constantes. Muestre que estas constantes son respectivamente la densidad, la velocidad media y la temperatura del gas. Calcule $\boldsymbol{q}$ y P_{ij} para esta distribución.

4. Obtenga la distribución de Maxwell-Boltzmann a partir de los ensambles microcanónico y canónico.

5. Un gas en equilibrio está a temperatura T y tiene densidad de partículas n. Su función de distribución es la de Maxwell-Boltzmann. Sobre una de las paredes del recipiente que contiene al gas, hay un pequeño orificio de área A. Asumiendo que pueda despreciarse el efecto del orificio sobre la distribución de equilibrio del gas, calcular el número de partículas que escapan por unidad de tiempo.

6. Una habitación de volumen $3 \times 3 \times 3$ m^3 se encuentra en condiciones estándar (presión atmosférica y temperatura 300 K).

   (a) Estime la probabilidad de que, en un dado instante de tiempo, una dada región de la habitación de volumen 1 cm^3 se quede sin aire debido a fluctuaciones estadísticas espontáneas.

   (b) Repita la estimación para un volumen de 1 Å^3.

7. Encuentre la función de distribución de equilibrio y la ecuación de estado de un gas diluido de partículas ultrarrelativistas con velocidad media nula (note que en este caso no es válida la definición de temperatura que se dio en el problema 1d).

8. Escribir la función de distribución de equilibrio de un gas en un potencial externo $\phi(\boldsymbol{r})$. Sea n_0 la densidad del aire en la superficie terrestre. Determine la densidad $n(z)$ a una altura z suponiendo equilibrio. Despreciar la variación de g con la altura.

9. Una columna cilíndrica de gas rota alrededor de su eje a velocidad angular constante ω. Encuentre la función de distribución de equilibrio.

10. Considere un gas diluido fuera del equilibrio, y vamos a escribir su función de distribución como la de Maxwell-Boltzmann local más una corrección: $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) + \delta f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$, con

$$f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{n(\boldsymbol{r}, t)}{(2\pi mkT(\boldsymbol{r}, t))^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p - m\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)^2}{2mkT(\boldsymbol{r}, t)}\right], \tag{1}$$

donde n, $\boldsymbol{u}$ y T son respectivamente la densidad, la velocidad media y la temperatura del gas.

(a) ¿Qué condiciones debe satisfacer δf para que n, $\boldsymbol{u}$ y T sean efectivamente la densidad, la velocidad media y la temperatura del gas?

En la aproximación de tiempo de relajación se asume que hay una constante τ con unidades de tiempo (el tiempo de relajación) tal que $(\partial f/\partial t)_{\text{col}} \simeq \delta f/\tau$, con lo cual se tiene

$$\delta f = -\tau\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_0 + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} f_0\right) + O(\tau^2).$$

A partir de ahora supondremos por simplicidad que el gas está en reposo, $\boldsymbol{u} = 0$, y que no hay fuerzas externas, $\boldsymbol{F} = 0$.

b) Encuentre qué relaciones deben satisfacer n y T como consecuencia de las condiciones del ítem (a).

c) Pruebe que la densidad de corriente de calor tiene la forma

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T + O(\tau^2),$$

y obtenga el valor de la conductividad térmica κ. ¿Cuál es entonces la ecuación que describe la evolución del perfil de temperaturas con el tiempo?

11. En este problema se calcula la conductividad eléctrica de un gas maxwelliano de electrones en la aproximación de tiempo de relajación. Ésta es una buena aproximación para un plasma: esencialmente, un gas neutro de iones con poca movilidad y electrones libres que chocan únicamente contra los iones. Es importante notar que, debido a la disparidad entre las masas de los electrones y de los iones, desde el punto de vista de los electrones los iones son blancos fijos de masa infinita. En estos choques la energía de los electrones se conserva, pero no su impulso. La distribución de equilibrio, que se construye a partir de las cantidades que se conservan en las colisiones, carecerá por lo tanto de un término lineal en el impulso, y por lo tanto estará dada por (1) con $\boldsymbol{u} = 0$. Suponga que el gas se encuentra en el régimen estacionario.

(a) Demostrar que para la fuerza de Lorentz, $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{p}/m) \times \boldsymbol{B}]$, con campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ independientes del tiempo, las condiciones que deben satisfacer n y T en (1) para ser la densidad y la temperatura del gas de electrones se satisfacen automáticamente.

(b) Demostrar que la velocidad media del gas de electrones está dada por

$$n\boldsymbol{u} = -\frac{\tau}{m}\nabla(nkT) + \frac{\tau n q \boldsymbol{E}}{m} + O(\tau^2).$$

Multiplicando por q se obtiene la corriente eléctrica; el término proporcional a $\boldsymbol{E}$ es la conductividad. Al margen de esto, se ve que un gradiente de temperatura también genera una corriente eléctrica.