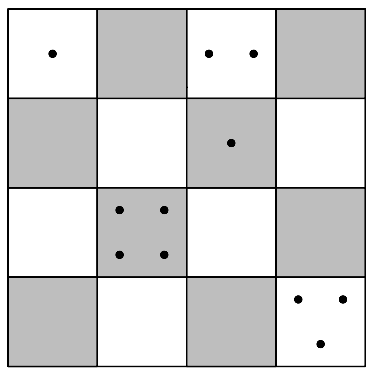
Primer parcial de Física Teórica 3
9/5/2022

Problema 1

Un recipiente está dividido en $2M$ celdas, cada una de las cuales puede albergar un número arbitrario de partículas. La mitad de las celdas son de tipo A, y la otra mitad son de tipo B. Una partícula tiene energía $\epsilon > 0$ si se encuentra en una celda de tipo A, y energía 0 si se encuentra en una celda de tipo B. El recipiente contiene N partículas indistinguibles, y la energía total del sistema es E. En la figura se muestra un microestado a modo de ejemplo.



(a) Relacione E y N con el número N_A de partículas en celdas de tipo A y el número N_B de partículas en celdas de tipo B.

(b) Calcule la entropía del sistema en el ensamble microcanónico, asumiendo que $M, N_A, N_B \gg 1$. ¿Es extensiva?

(c) Calcule la temperatura T, y a partír de ahí obtenga la energía del sistema a $T = 0$ y $T \to \infty$. Discuta sus resultados.

(d) Repita el ítem (b) suponiendo ahora que las partículas son distinguibles.

Problema 2

Considere una cadena lineal formada por N eslabones distinguibles que no interactúan entre sí. Cada eslabón es un oscilador armónico cuántico de frecuencia angular ω (de manera que sus energías posibles son $\epsilon = \hbar\omega(n + 1/2)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$) que además puede tener dos longitudes, a y $b > a$. La cadena se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule la función de partición isobárica de la cadena en función de su tensión.

(b) Calcule la energía de la cadena, y estudie los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$ (le puede ser útil saber que $\coth x \simeq 1/x$ para $x \ll 1$).

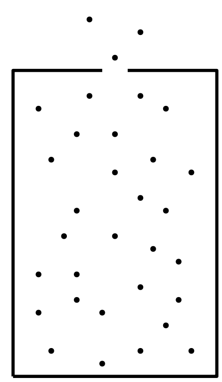
(c) Calcule la tensión de la cadena en función de su longitud (hágalo exactamente, sin asumir que la tensión es pequeña). Grafique su resultado y discuta.

Problema 3

Un gas diluido formado por N partículas de masa m está contenido en un recipiente de volumen V aislado por paredes adiabáticas. No hay fuerzas externas, en particular no hay gravedad. El gas está en equilibrio a temperatura T, de manera que su función de distribución es la de Maxwell-Boltzmann,

$$f(p) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-p^2/(2mkT)},$$

donde $n = N/V$ es la densidad de partículas. En una de las paredes del recipiente se abre un pequeño orificio de área a, tal como se muestra en la figura.



(a) Calcule el número de partículas que escapan por unidad de tiempo. ¿Cuánto vale entonces $\dot{N}$, la derivada del número de partículas dentro del recipiente?

(b) Calcule la energía que escapa por unidad de tiempo (*ayuda:* se recomienda usar coordenadas esféricas en el espacio de momentos; le serán útiles las integrales $\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = 1/2$ y $\int_0^{\infty} dx\, x^5 e^{-x^2} = 1$). ¿Cuánto vale entonces $\dot{E}$, la derivada de la energía dentro del recipiente?

(c) Teniendo en cuenta que $E = (3/2)NkT$, calcule $\dot{T}$, la derivada de la temperatura del gas dentro del recipiente. ¿Cómo explica el signo de esta derivada?

(d) ¿Cómo cambian los resultados de los ítems anteriores si, además del pequeño orificio que aparece en la figura, hay otro, de área b, en una de las paredes laterales del recipiente?