

Segundo parcial de Física Teórica 3

8/7/2022

Problema 1

Un gas bidimensional de N electrones está contenido en un recipiente de área A , en presencia de un campo magnético de módulo B . Las energías monoparticulares son pues

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu B,$$

donde m es la masa del electrón, μ su momento magnético y el signo $+/-$ corresponde a que el spin se oriente antiparalelo/paralelo al campo. El sistema se encuentra a temperatura 0.

- (a) Calcule el mínimo valor B_0 que debe tomar B para que todos los electrones tengan su spin orientado en la dirección del campo.
- (b) Calcule la energía de Fermi y la magnetización del sistema, tanto en el caso $B < B_0$ como en el caso $B > B_0$, y gráfíquelas en función de B . Discuta sus resultados para ambas cantidades.

Problema 2

Un gas bidimensional de partículas de spin 0 y masa m está contenido en un recipiente cuadrado de lado L . Las partículas están sometidas a un potencial lineal en una de las dos coordenadas cartesianas, digamos la coordenada y , de modo que las energías monoparticulares son

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha y}{L}, \quad (1)$$

donde α es una constante positiva. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T .

- (a) Calcule el número N de partículas en función de la fugacidad, ignorando por el momento las sutilezas asociadas al estado fundamental (*ayuda*: se va a encontrar con una integral que involucra a g_1 ; esa integral se puede calcular en términos de g_2). Verifique su resultado estudiando el límite $\alpha \rightarrow 0$.
- (b) Calcule el valor crítico de la densidad $n = N/L^2$ por arriba del cual la fracción de partículas en el estado fundamental es no nula en el límite termodinámico. Discuta su resultado en comparación con lo que ocurre en el caso $\alpha = 0$.
- (c) Calcule la fracción de partículas en el estado fundamental en función de n , y gráfíquela cualitativamente.

Problema 3

Considere una red de N spines con hamiltoniano

$$H = -\frac{J}{2N} \left(\sum_{i=1}^N s_i \right)^2,$$

donde J es una constante positiva y $s_i = \pm 1$. Nótese que, debido a que la suma está elevada al cuadrado, cada spin interactúa con todos los demás. Este sistema es especial porque presenta una transición de fase ferromagnética que se puede estudiar exactamente, y de forma sencilla. De eso trata este problema. Trabajaremos en el ensamble microcanónico.

- (a) Si el sistema tiene energía E (necesariamente menor o igual a cero), ¿cuál es el número N_+ de spines que apuntan hacia arriba? Y el número N_- de spines que apuntan hacia abajo?
- (b) En el ensamble microcanónico, calcule la entropía del sistema en función de su energía, asumiendo que $N_+, N_- \gg 1$.
- (c) Calcule la temperatura T del sistema en función de su energía, y a partir de ahí muestre que

$$m = \frac{kT}{2J} \log \frac{1+m}{1-m},$$

donde $m = (N_+ - N_-)/N$ es la magnetización. Estudie esta ecuación gráficamente, y determine la temperatura crítica por debajo de la cual $m \neq 0$.

Una vez resuelto este problema, tómese un momento para saborearlo: probablemente sea la primera transición de fase ferromagnética que obtiene exactamente.