

Resolución segundo parcial de Física Teórica 3

8/7/2022

Problema 1

(a) Digamos que el campo magnético apunta hacia arriba. El número de electrones con spin hacia arriba es igual al número de estados monoparticulares con spin hacia arriba y energía menor a la energía de Fermi,

$$N_{\uparrow} = \int_{\frac{p^2}{2m} - \mu B < \epsilon_F} \frac{d^2q d^2p}{h^2} = \frac{A}{h^2} \int_{p < \sqrt{2m(\epsilon_F + \mu B)}} d^2p = \frac{A}{h^2} 2\pi m(\epsilon_F + \mu B). \quad (1)$$

En el último paso simplemente hemos usado la fórmula del área de un círculo. El número de electrones con spin hacia abajo es el número de estados con spin hacia abajo y energía menor a la de Fermi,

$$N_{\downarrow} = \int_{\frac{p^2}{2m} + \mu B < \epsilon_F} \frac{d^2q d^2p}{h^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu B > \epsilon_F \\ \frac{A}{h^2} 2\pi m(\epsilon_F - \mu B) & \text{si } \mu B < \epsilon_F. \end{cases} \quad (2)$$

Es claro entonces que, para que todos los spines apunten hacia arriba, necesitamos $\mu B > \epsilon_F$. Además, en ese caso la ecuación (1) nos da el número total de partículas. De las dos cosas obtenemos

$$N < \frac{A}{h^2} 4\pi m \mu B, \quad (3)$$

de manera que el mínimo valor que debe tomar B para que todos los spines apunten hacia arriba es

$$B_0 = \frac{h^2}{4\pi m \mu} \frac{N}{A}. \quad (4)$$

(b) Para $B < B_0$, el número de spines apuntando hacia abajo está dado por el segundo caso de (2). Sumando esa ecuación y la ecuación (1) obtenemos

$$N = \frac{A}{h^2} 4\pi m \epsilon_F \quad (5)$$

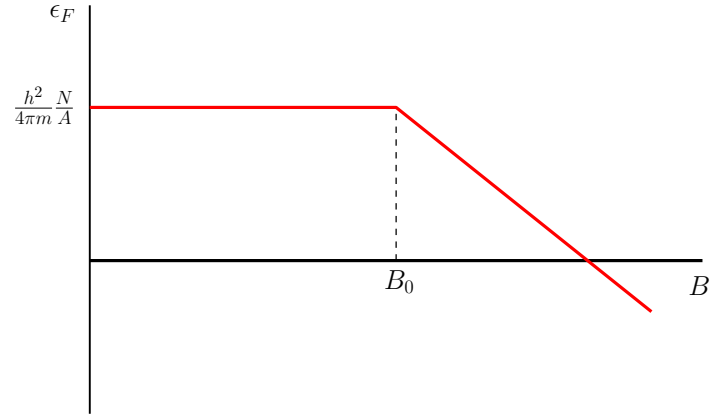
, de modo que

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{4\pi m} \frac{N}{A} \quad (B < B_0). \quad (6)$$

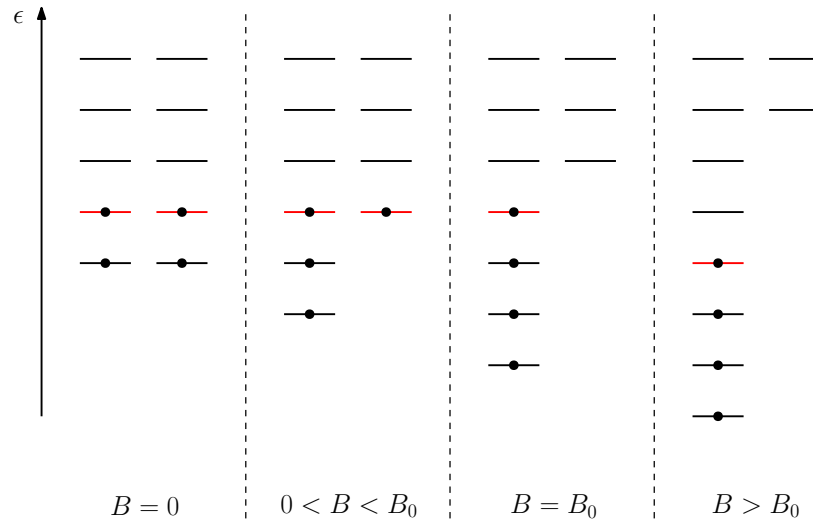
Para $B > B_0$, la ecuación (1) da el número total de partículas, así que de ahí despejamos la energía de Fermi,

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2\pi m} \frac{N}{A} - \mu B \quad (B > B_0). \quad (7)$$

El gráfico de la energía de Fermi en función de B es entonces el siguiente.



¿Cómo entender este resultado? Por simplicidad, hagamos de cuenta que, para cada nivel de energía y cada orientación del spin, hay un solo estado monoparticular (no es así en realidad, pero asumámoslo para simplificar la discusión). En la siguiente figura se muestran los niveles con spin up (columna izquierda) y spin down (columna derecha) para varios valores de B . Los estados con un puntito son los ocupados (la figura corresponde a $N = 4$). El nivel marcado en rojo es el de Fermi (máxima energía ocupada).



A medida que vamos aumentando B , los estados de spin up bajan de energía y los de spin down suben. Para minimizar la energía del sistema, hay una transferencia de partículas de los estados de spin down a los estados de spin up. Mientras dura esa transferencia, la energía de Fermi se mantiene constante;

cuando ya no quedan partículas por transferir, la energía de Fermi empieza a bajar.

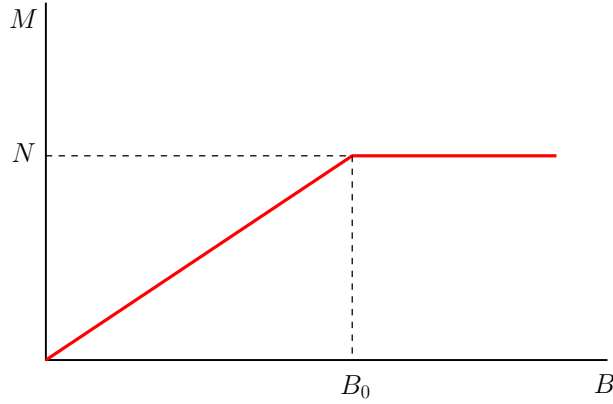
Vamos ahora con la magnetización $M = N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$ (pueden dividir por N , o por A , y/o multiplicar por μ ; pueden usar la convención que quieran). Eso es muy fácil: para $B < B_0$ le restamos a (1) el segundo caso de (2) y obtenemos

$$M = \frac{A}{h^2} 4\pi m \mu B \quad (B < B_0). \quad (8)$$

Para $B > B_0$ tenemos $N_{\uparrow} = N$, $N_{\downarrow} = 0$, así que la magnetización es

$$M = N \quad (B > B_0). \quad (9)$$

Grafiquemos.



La interpretación de esto es fácil: a medida que aumenta B , aumenta el número de spines alineados con el campo, hasta que no puede aumentar más porque no hay más partículas.

Problema 2

(a) Calculamos el número de partículas a partir de la distribución de Bose-Einstein,

$$N = \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta(p^2/2m + \alpha y/L)} - 1}. \quad (10)$$

Definiendo la fugacidad efectiva $z_y = z e^{-\beta \alpha y/L}$, esta ecuación toma la forma

$$N = \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} \frac{1}{z_y^{-1} e^{\beta p^2/2m} - 1} = L \int_0^L dy \int \frac{d^2p}{h^2} \frac{1}{z_y^{-1} e^{\beta p^2/2m} - 1}. \quad (11)$$

La integral en momentos ya sabemos cuánto vale: es la densidad de partículas de un gas de Bose “de toda la vida” en dos dimensiones, sólo que evaluada en

la fugacidad efectiva. Así pues,

$$N = \frac{L}{\lambda^2} \int_0^L dy g_1(z_y). \quad (12)$$

Cambiando variables de y a z_y , y usando que $dz_y/dy = -(\beta\alpha/L)z_y$, obtenemos

$$\begin{aligned} N &= -\frac{L^2}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} \int_z^{z_L} dz_y \frac{g_1(z_y)}{z_y} = \frac{L^2}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} \int_{z_L}^z dz_y g_2'(z_y) \\ &= \frac{L^2}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} [g_2(z) - g_2(z_L)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Así pues, el número de partículas es

$$\boxed{N = \frac{L^2}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} [g_2(z) - g_2(ze^{-\beta\alpha})]}. \quad (14)$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Para resolver la indeterminación, expandimos el último término a primer orden en α ,

$$g_2(ze^{-\beta\alpha}) \simeq g_2(z - z\beta\alpha) \simeq g_2(z) - z\beta\alpha g_2'(z) = g_2(z) - \beta\alpha g_1(z). \quad (15)$$

Reemplazando en (14) obtenemos

$$N = \frac{L^2}{\lambda^2} g_1(z) \quad (\alpha \rightarrow 0), \quad (16)$$

que es el resultado que ya conocemos para un gas de Bose bidimensional en ausencia de potencial externo.

(b) El valor crítico de la densidad se obtiene tomando $z = 1$ en (14),

$$\boxed{n_c = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} [\zeta(2) - g_2(e^{-\beta\alpha})]}. \quad (17)$$

Para densidades más altas, tenemos un condensado de Bose-Einstein. En el caso $\alpha = 0$, la ecuación (16) da $n_c = \infty$, es decir, no hay condensación de Bose-Einstein en dos dimensiones en ausencia de un potencial externo. ¿Por qué el potencial hace que sí la haya? Al agregar el potencial estamos haciendo subir la energía de todas las partículas que no están en la base del recipiente, $y = 0$. Por lo tanto, hay menos estados de baja energía y es más probable que uno de ellos (el fundamental) se pueble macroscópicamente.

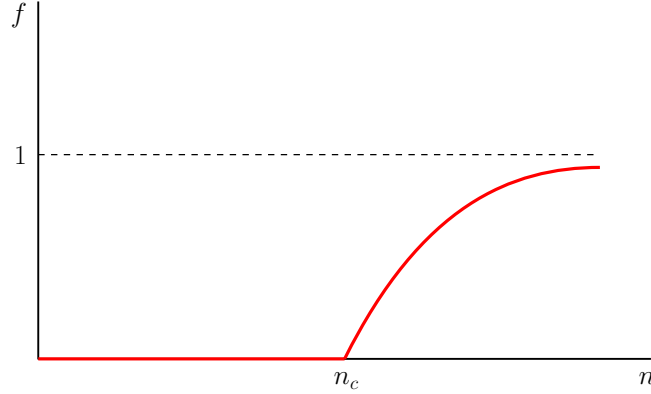
(c) Para $n < n_c$ tenemos $z < 1$, de manera que el número de partículas en el fundamental, $N_0 = 1/(z^{-1} - 1)$, es finito y por lo tanto la fracción $f = N_0/N$ se anula. Para $n > n_c$ tenemos $z = 1$ y la ecuación (14) debe ser corregida agregando la contribución del fundamental,

$$N = N_0 + \frac{L^2}{\lambda^2} \frac{1}{\beta\alpha} [\zeta(2) - g_2(e^{-\beta\alpha})] = N_0 + L^2 n_c. \quad (18)$$

Despejando de acá obtenemos

$$\boxed{f = 1 - \frac{n_c}{n} \quad (n > n_c).} \quad (19)$$

Esto lo graficamos fácil.



Problema 3

(a) Notemos primero que

$$\sum_{i=1}^N s_i = N_+ - N_-, \quad (20)$$

porque cada spin que apunta hacia arriba contribuye con $+1$ a la suma, y cada spin que apunta hacia abajo contribuye con -1 . Así pues, si $H = E$ tenemos

$$-\frac{J}{2N}(N_+ - N_-)^2 = E \quad (21)$$

y por lo tanto

$$N_+ - N_- = \pm \sqrt{\frac{-2NE}{J}}. \quad (22)$$

El signo menos dentro de la raíz no debe inquietarnos, porque $E \leq 0$. Escribiendo $N_- = N - N_+$ en esta ecuación obtenemos

$$\boxed{N_+ = \frac{1}{2} \left(N \pm \sqrt{\frac{-2NE}{J}} \right) \equiv n_{\pm},} \quad (23)$$

lo cual implica

$$\boxed{N_- = n_{\mp}.} \quad (24)$$

El hecho de que haya dos soluciones para (N_+, N_-) no tiene mayores consecuencias, como vamos a ver en un momento.

(b) Si el sistema tiene energía E , entonces puede tener o bien n_+ o bien n_- spines apuntando hacia arriba. El número de microestados es entonces

$$\Omega(E) = \Omega(n_+) + \Omega(n_-) = \binom{N}{n_+} + \binom{N}{n_-} = 2 \frac{N!}{n_+! n_-!}. \quad (25)$$

Las dos soluciones que encontramos en el ítem anterior son las responsables de ese factor 2. La entropía es entonces

$$\boxed{S = k \log \Omega = k [N \log N - n_+ \log n_+ - n_- \log n_-]}, \quad (26)$$

donde hemos tirado el término $\log 2$ por ser despreciable en el límite termodinámico. Vemos que, efectivamente, el hecho de haber encontrado dos soluciones en el ítem anterior no tiene consecuencias. Esta ecuación, junto con (23), es la respuesta a la pregunta que nos hacen.

(c) La temperatura la calculamos derivando la entropía,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial n_+}{\partial E} \left(\frac{\partial S}{\partial n_+} - \frac{\partial S}{\partial n_-} \right) = \frac{Nk}{2J} \sqrt{\frac{-J}{2NE}} \log \frac{n_+}{n_-} \\ &= \frac{Nk}{2J} \sqrt{\frac{-J}{2NE}} \log \frac{1 + \frac{1}{N} \sqrt{\frac{-2NE}{J}}}{1 - \frac{1}{N} \sqrt{\frac{-2NE}{J}}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Nótese a partir de (22) que $\sqrt{-2NE/J} = \pm Nm$, así que podemos reescribir esta ecuación en términos de la magnetización,

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{k}{2Jm} \log \frac{1 \pm m}{1 \mp m}. \quad (28)$$

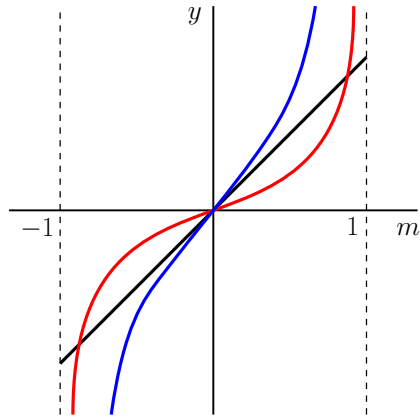
La expresión en el lado derecho es la misma tanto si nos quedamos con el signo de arriba como si elegimos el de abajo, así que

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2Jm} \log \frac{1+m}{1-m}, \quad (29)$$

y por lo tanto

$$\boxed{m = \frac{kT}{2J} \log \frac{1+m}{1-m} \equiv f_T(m)}, \quad (30)$$

tal como se nos pedía demostrar. Estudiemos esta ecuación gráficamente: graficamos las curvas $y = m$ e $y = f_T(m)$, y los puntos donde se cruzan son las soluciones de la ecuación. Para graficar f_T , notemos que esta función es impar y tiende a infinito cuando $m \rightarrow 1$; notemos también que su pendiente en el origen aumenta con T . Obtenemos, pues, el siguiente gráfico.



La curva negra es la curva $y = m$; la roja, $y = f_T(m)$ para temperaturas bajas; la azul, $y = f_T(m)$ para temperaturas altas. Así pues, a temperaturas bajas tenemos soluciones no nulas para la magnetización, a temperaturas altas no. La temperatura T_c que marca la frontera entre ambos regímenes es aquella para la que la pendiente de la curva en el origen coincide con la de la recta, es decir,

$$f'_{T_c}(0) = 1. \quad (31)$$

Claramente, $f'_T(0) = kT/J$, así que

$$\boxed{T_c = \frac{J}{k}}. \quad (32)$$