Boltzmann & transporte

Lectura: K. Huang, Cap. 5; M. Kardar Cap. 3; F. Reif. Cap 12-13.

» La ecuación de Boltzmann

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{F}\cdot\nabla_p + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r\right) f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}}
$$

$$
= \int d^3p_2 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}|v_2 - v_1| \left[f(p_1')f(p_2') - f(p_1)f(p_2)\right]
$$

donde $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ es la distribución de 1 partícula, i.e, $dN = f(r,p,t)d^3r\, d^3p$ es el número de partículas con posición entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{dr}$ y momento entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{dp}$

» Promedios locales

Sea $\mathcal{O}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ vamos a trabajar con promedios sobre $\boldsymbol{p}$

$$\langle \mathcal{Q} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathcal{O}(r,p)\, f(r,p,t)\, d^3p}{\underbrace{\int f(r,p)\, d^3p}_{n(r,t)}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(r,t)\, n(r,t) = \displaystyle\int \frac{\boldsymbol{p}}{m} f(r,p,t)\, d^3p \\ \epsilon(r,t)\, n(r,t) = \displaystyle\int \frac{m}{2} \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} - \boldsymbol{u}\right)^2 f(r,p,t)\, d^3p \\ \vdots \end{cases}$$

» Leyes de Conservación

¿Qué pasa con las magnitudes (χ) que se conservan microscópicamente?

$$\chi(p_1, q, t) + \chi(p_2, q, t) = \chi(p'_1, q, t) + \chi(p'_2, q, t)$$

» Conservación del número de partículas ($\chi = 1$)

$$\int d^3p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_p + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_r \right) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \cancelto{0}{\int d^3p \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}}}$$

$$\int d^3p \partial_t f(r, p, t) + \cancel{\int d^3p \boldsymbol{F} \cdot \nabla_p f} + \int d^3p \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_r f = 0$$

$$\partial_t n(r, t) + \nabla_r \cdot \int d^3p \frac{\boldsymbol{p}}{m} f = 0$$

$$\boxed{\partial_t n + \nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0}$$

Momento lineal $\chi = \dfrac{\boldsymbol{p}}{m} - \boldsymbol{u}$

$$\boxed{\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{1}{mn}\nabla\cdot\mathbb{P}}$$

con

$$P_{ij}(\boldsymbol{r},t) = \int (p_i/m - u_i)(p_j - mu_j)\, f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)\, d^3p$$

Energía cinética $\chi = \dfrac{m}{2}\left(\boldsymbol{p}/m - \boldsymbol{u}\right)^2$

La densidad local de energía cinética, $\varepsilon = \langle \frac{(p-mu)^2}{2m} \rangle$

$$\boxed{\partial_t \varepsilon + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon = -\frac{1}{n}\nabla\cdot\boldsymbol{q} - \frac{1}{n}P_{ij}u_{ij}}$$

con

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{m}\int (\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2\, f(r,p,t)\, d^3p$$

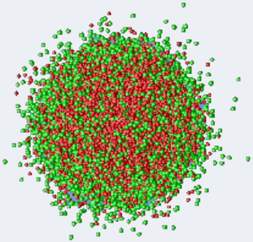
y $u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right)$

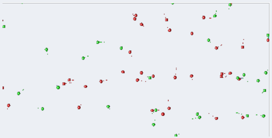
» ¿Cada cuánto choca una partícula?

El No. total de colisiones por unidad de tiempo es

$$Z = \int d^3r\, d^3p_1 d^3p_2\, \sigma\, |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| f(r, p_1, t) f(r, p_2, t) \quad \Rightarrow \quad \tau_c \simeq \frac{N}{2Z}$$

En un sistema uniforme en equilibrio $\tau_c = \dfrac{1}{4n\sigma}\sqrt{\dfrac{m\pi}{k_B T}}$ y el camino libre medio $\lambda = \bar{v}\,\tau_c$





» Límite de colisiones muy frecuentes

Si $\tau_c \ll \tau_U$

$$f(r,p,t) = f^{\text{MB local}}[\boldsymbol{u},\beta,n] = n(r,t)\left(\frac{\beta(r,t)}{2\pi m}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta(r,t)}{2m}(\boldsymbol{p}-mu(r,t))^2}$$

Equilibrio **local**

$$P_{ij} = \delta_{ij}P = \frac{1}{3m}\int (\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2 f(r,p,t)\, d^3p$$

$$= \frac{1}{3m}\int p^2 n \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta}{2m}p^2}\, d^3p$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}m}\cancel{3}\frac{mn}{\beta} = n(r,t)k_B T(r,t)$$

$\boldsymbol{q} = ?$

$\varepsilon = ?$

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0, \qquad m\left[\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}\right] = \boldsymbol{F} - \frac{\nabla P}{n}, \qquad \left[\partial_t T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T\right] = -\frac{2}{3} T \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

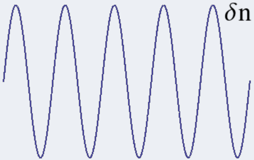
¿Qué pasa con la ecuación de $T(r,t)$?

$$\partial_t n + \nabla\cdot(n\boldsymbol{u}) = 0, \qquad m\left[\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] = \boldsymbol{F} - \frac{\nabla P}{n}, \qquad \left[\partial_t T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T\right] = -\frac{2}{3} T\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

¿Qué pasa con la ecuación de $T(r,t)$?

$$\frac{n}{T^{3/2}} = \text{constante} \qquad S = -k_B H = N\left\{\ln\left[n\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\right] - \frac{3}{2}\right\}$$

Propagación de Ondas



» Cerca del hidrodinámico – Aproximación del tiempo de relajación

Si $f(r,p,t) = \overbrace{f^{(0)}(r,p,t)}^{\text{local}} + g(r,p,t)$. Así

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} &= \int d^3p_2 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \left[f(p_1')f(p_2') - f(p_1)f(p_2)\right] \\
&\simeq \int d^3p_2 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \Big[f^{(0)}(p_1')g(p_2') + g(p_1')f^{(0)}(p_2') \\
&\quad -f^{(0)}(p_1)g(p_2) - g(p_1)f^{(0)}(p_2)\Big]
\end{aligned}$$

En la aproximación del tiempo de relajación (τ) tenemos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} \simeq -\frac{g}{\tau} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}$$

$$\left(\partial_t + \boldsymbol{F}\cdot\nabla_p + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r\right)\left(f^{(0)} + g\right) \simeq -\frac{g}{\tau}$$

Flujo de calor – Conductividad térmica

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$