Ejercicios de Probabilidad.

Tomás Suleiman

Segundo Cuatrimestre 2022

Problema 15 - Guía 2

Un complicado problema de combinatoria y probabilidad, que involucra a cuatro pistoleros, y en donde hay que averiguar cuál es la mejor estrategia que debe seguir cada uno si quiere mantenerse con vida, es omitido en esta guía. No así un problema que deriva de aquél, y que traducimos en esta forma:

El problema de los pistoleros daneses. El último pistolero con vida decide, como es natural, celebrar su triunfo con una fiesta. ¡Ahora tiene tantos amigos! (pues esto suele acontecerle a los ganadores) que, dejando sólo lo más pasable, decide reunir a 111 comensales. Tal como ha escuchado que es de uso en las recepciones de los embajadores de los mejores países del mundo, frente a cada silla dispone una tarjeta con el nombre del invitado correspondiente. Desafortunadamente, hombre de poco roce, el primer invitado en llegar no nota este detalle y se sienta en un lugar al azar (es decir, puede incluso ocupar el lugar correcto). Resignados y corteses (hijos de Odín al fin y al cabo), los otros invitados se sientan en sus lugares correctos, siempre y cuando los encuentren disponibles; caso contrario toman un lugar desocupado al azar. La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que el último invitado en llegar se siente en el lugar que le fue originalmente asignado? La respuesta es completamente anti intuitiva.

Sugerencia: Los casos simples de 2, 3, 4 invitados pueden analizarse directamente y servir como base al problema de los 111 invitados. Es interesante también hacer el experimento numérico en la computadora: en muy pocas líneas puede escribirse un programa que genere el ordenamiento final de los invitados, cuyo número puede variarse; ejecutándolo muchas veces y contando aquellas en que el último invitado se sienta en el lugar que le corresponde, puede estimarse la probabilidad buscada y su dependencia con el número de invitados.

Solución

La dificultad de este problema radica únicamente en la dificultad para contar, por es muy conveniente que seamos muy explícitos a la hora de hacerlo así evitamos cometer algunos errores. Para ir ganando un poco de intuición y ejercitar el conteo, comencemos analizando algunos casos simples. Por ejemplo, supongamos que únicamente hay dos invitados (bolitas) y dos sillas (cajas). Cuando llega el primero 1 tiene dos sillas para elegir, la que le fue asignada y la que no. Si 1 se sienta en la silla que le fue asignada (la silla 1), automáticamente 2 se sentará en la silla 2, lo cual nos da un caso favorable. En cambio, si 1 se sienta en la silla 2, a 2 no le queda otra que tomar la silla 1, dándonos un caso desfavorable. En este caso es sencillo, tenemos un caso favorable y uno desfavorable, por lo que la probabilidad que queremos calcular es $P = 1/2$.

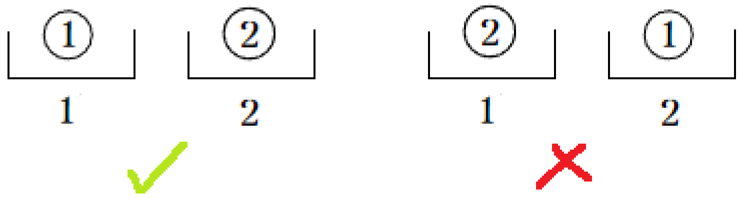

Figura 1: Dos invitados. Tenemos dos casos, uno favorable y otro desfavorable.

Ahora hagámoslo con tres invitados. El primer invitado tiene tres sillas para elegir. Si 1 se sienta en la silla 1, automáticamente los otros dos invitados van a sentarse en la que les fue asignada a ellos, lo cual nos da un caso favorable. Si 1 se sienta en la silla 3, 2 se sentará correctamente y 3, al encontrar su silla ocupada, toma la silla 1. Esto nos da un caso desfavorable. Ahora, si 1 se sienta en la silla 2, 2 va a tener que elegir aleatoriamente entre dos sillas. Si elige la silla 1, el problema se arregla automáticamente y 3 se sienta correctamente. Si por otro lado, elige la silla 3, 3 encontrará únicamente desocupada la silla 1. De esta manera, tenemos dos casos favorables y dos desfavorables, lo cual nos da de nuevo $P = 1/2$.

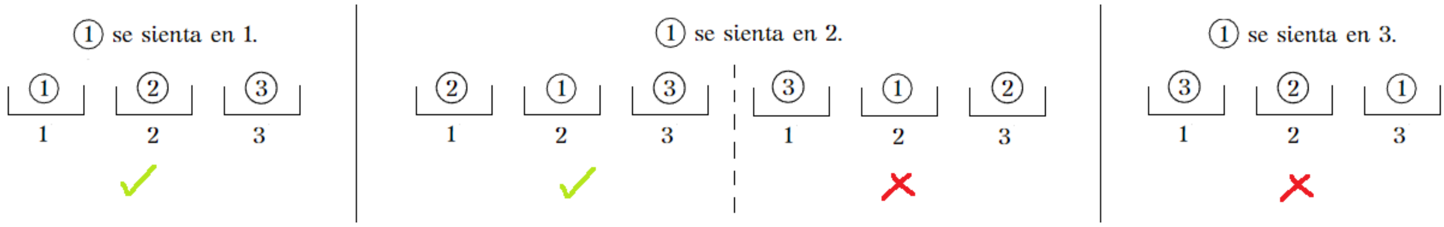

Figura 2: Tres invitados. Tenemos cuatro casos, dos favorables y dos desfavorables.

Uno a priori podría tratar de generalizar y decir que, sin importar la cantidad de invitados, $P = 1/2$. Sin embargo, hay que tener cuidado con esto porque podría ser que, apartir de 1378690 invitados, el resultado no sea ese. Cuando tenemos un escenario de este estilo, solemos estar tentados a usar inducción. Lo que buscaríamos probar es que $P(n) = 1/2$, siendo $P(n)$ la probabilidad de que el último invitado se siente correctamente para el problema con n invitados. De yapa, ya probamos que vale para $n = 2$, por lo que si probamos que

$$P(n) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad P(n+1 = 1/2),$$

sabemos que $P(n) = 1/2$ para todo $n \geq 2$. Sin embargo, en este caso usar inducción puede ser bastante complicado, ya que implica vincular el problema de $n+1$ invitados con el de n invitados. Aquí no cambia sólo el número de bolitas, sino también el número de cajas, lo cual vuelve un poco tediosa esa conexión entre ambos problemas. De todas formas, esto no nos tiene que desalentar, ya tenemos el problema resuelto para 2 y 3 invitados, ya practicamos como contar los casos y ahora tenemos un poco más de intuición de por donde viene la mano.

Vamos a hacerlo general, tenemos n invitados. Para ir formalizando un poco y poder contar todo de forma precisa vamos a definir Ω_k como los casos favorables (n se sienta en la silla n) para los cuales el 1 se sentó en la k-ésima silla. Análogamente, definimos $\tilde{\Omega}_k$ para los casos desfavorables. Con estas definiciones, los casos favorables y desfavorables totales serán

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \tag{1}$$

y

$$\tilde{\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\Omega}_k, \tag{2}$$

respectivamente. Calculemos Ω_k. El invitado 1 se sienta en la k-ésima silla. Desde el invitado 2 hasta el k-1 se sientan en el lugar que les fue asignado. Entonces, k se encuentra con el siguiente panorama.

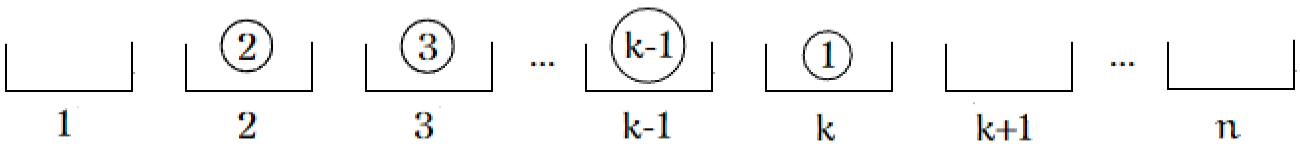

Figura 3: Panorama que se encuentra el k-ésimo invitado si el primero se sentó en su silla.

Si k se sienta en la silla 1 el problema se arregla y el invitado n se sienta correctamente. Entonces, tenemos un caso favorable. Si ocupa otra silla, por ejemplo la $j > k$, los invitados desde k+1 hasta j-1 se sientan correctamente. El invitado j se encuentra con el siguiente panorama.

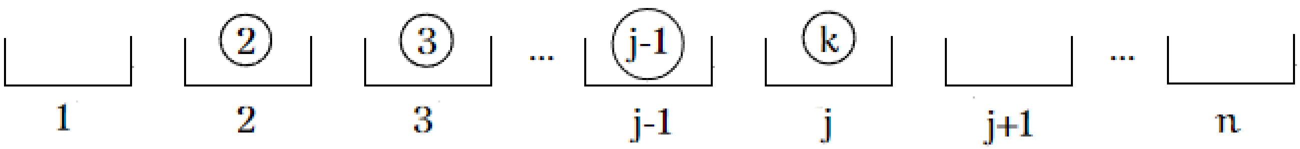

Figura 4: Panorama que se encuentra el j-ésimo invitado si el $k-$ésimo se sentó en su silla luego de que el primero se sentara en la silla k.

En cuestión de sillas vacías, este panorama es idéntico con el que se encontraría si fuese 1 quien se sentó en su silla en lugar de k. De esta manera, Ω_k depende de todos los Ω_j siguientes:

$$\Omega_k = 1 + \sum_{j=k+1}^{n} \Omega_j. \tag{3}$$

Sucede algo parecido con los casos desfavorables, sólo que no aparece ese caso extra por arreglarse el problema:

$$\tilde{\Omega}_k = \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{\Omega}_j. \tag{4}$$

Notemos que $\Omega_n = 0$ y $\tilde{\Omega}_n = 1$, ya que si 1 se sienta en la silla n, no hay manera de que n se siente en su silla. Entonces, las dos sumas tienen la misma pinta

$$\Omega_k = 1 + \sum_{j=k+1}^{n-1} \Omega_j, \tag{5}$$

$$\tilde{\Omega}_k = 1 + \sum_{j=k+1}^{n-1} \tilde{\Omega}_j. \tag{6}$$

Notemos que si $\Omega_{n-1} = \tilde{\Omega}_{n-1}$, entonces $\Omega_k = \tilde{\Omega}_k$, para todo k. Esto es fácil de ver para $n-2$:

$$\Omega_{n-2} = 1 + \Omega_{n-1}$$

y

$$\tilde{\Omega}_{n-2} = 1 + \tilde{\Omega}_{n-1}.$$

Así cuando sigamos para $n-3$, $n-4$, etc, vamos a llegar a la misma conclusión. Esto no es una demostración rigurosa y si tienen ganas pueden probarlas por inducción. Faltaría probar que, efectivamente, $\Omega_{n-1} = \tilde{\Omega}_{n-1}$. Hagámoslo a mano. Si el invitado 1 se sienta en la silla $n-1$, el invitado n-1 se encuentra con el siguiente panorama:

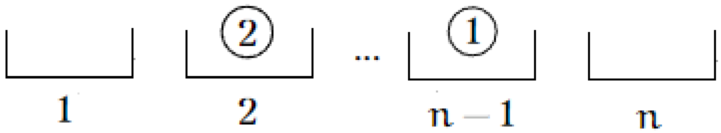

Figura 5: Panorama que se encuentra el $n-1$-ésimo invitado si el primero se sentó en su silla

Si se sienta en la silla 1, el invitado n se sentará en la silla que le corresponde. Si se sienta en la silla n, el invitado n no se sentará en su silla. Entonces $\Omega_{n-1} = \tilde{\Omega}_{n-1} = 1$ y, por lo tanto $\Omega_k = \tilde{\Omega}_k$, para todo k. De esta manera, $\Omega = \tilde{\Omega}$, ya que estamos sumando las mismas cosas entre los mismos índices. Finalmente,

$$P = \frac{\Omega}{\Omega + \tilde{\Omega}} = \frac{\Omega}{2\Omega} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Es verdad lo que nos dice el enunciado, la respuesta es completamente anti intuitiva. Sin importar el número de invitados, la probabilidad da 1/2. Esto tiene sentido si pensamos en qué sillas libres puede encontrar n cuando llega a la fiesta. Las únicas sillas que puede encontrar disponibles son la 1 y la n. Si encontrara, por ejemplo, la silla 4 vacía, es porque el invitado 4 se sentó en una silla que no le correspondía, ¡incluso cuando la suya estaba libre! Pero ese no es el comportamiento que nos dice que tiene el invitado 4, ni ningún otro que no sea el 1. Entonces, n sólo puede encontrarse con su silla o con la de 1. Esto no prueba del todo que la probabilidad de 1/2,¿no? Lo que sí nos da una fuerte intuición de que debe ser así es que las sillas son indistinguibles para el invitado que encuentra su silla ocupada. Si un invitado encontró su silla ocupada, cualquier otra silla en la que se siente le da lo mismo. De esta manera, podemos pensar que, cada caso en el que n encuentra la silla 1 vacía, tiene su contraparte, tiene un caso en el que n encontró su silla vacía.

El problema de los 100 presos

El director de una prisión le ofrece una última oportunidad a 100 presos condenados a la pena de muerte. En una habitación hay un mueble con 100 cajones. El director coloca un papel con el nombre de cada prisionero en un cajón. Los presos deben entrar uno a uno a la habitación y hallar el cajón en el que se encuentra su nombre. Podrán abrir 50 cajones y deben dejar la habitación tal cual la encontraron al salir. Los presos no pueden comunicarse entre ellos hasta que salga el último. Si al finalizar todos hallaron su nombre, son liberados. Si al menos uno no encontró su nombre, a todos los espera la muerte. Antes de comenzar, los prisioneros pueden discutir su estrategia. ¿Qué estategia deben elegir?

Solución

Primero pensemos en cual es la probabilidad de que se salven si no discuten nada y todos los presos entran a abrir cajones aleatoriamente. Cada uno tiene una probabilidad de 1/2 de hallar su nombre. Entonces, la probabilidad de que todos hallen su nombre es $P = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 8 \times 10^{-31}$. Esto quiere decir que si hicieran este experimento 10^{31} veces, solo 8 se salvarían. No parece ser una buena idea.

No pretendo que se les ocurra la estrategia con la cual aumentan sus chances de sobrevivir (a mi no se me ocurrió). Lo que pretendo hacer ahora es contarles una estrategia que aumenta sus chances a aproximadamente 0,3. Si tienen ganas y tiempo, dejen de leer por un rato y traten de encontrarla.

Con el fin de facilitar la confección de las figuras, lo voy a hacer con 10 prisioneros y 5 intentos para encontrar su nombre. Asignémosle a cada prisionero un número del 1 al 10. Podemos asignarle también un número a cada cajón. Así, tendremos 10 cajones numerados con un papel que adentro tiene un número, que no tiene porqué coincidir con el número de cajón. A un prisionero se le ocurre la siguiente idea. El primer cajón que debemos abrir es el que tiene nuestro número. Entonces, el prisionero 1 se acercará al cajón número 1 y lo abrirá. Adentro va a haber un papel con un número. Si es su número, puede salir de la habitación. Supongamos que no, y que el número dentro del cajón 1 es el 8. Entonces, debe dirigirse al cajón 8 y abrirlo. Si dentro está el número 1, se retir de la habitación. Si no, supongamos que está el 3, se dirije al cajón 3, y así hasta hallar su número. De esta manera, los cajones están conectados por loops cerrados. El cajón 1 te dirige al 8 y luego al 3 y, por último, de nuevo al 1.

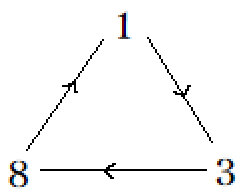

Figura 6

Si la situación es la que se presenta en la Figura 7, todos los presos tienen garantizado hallar su nombre en un número de intentos menor a 5, y se salvan. Sin embargo, si la situación fuese la de la Figura 8, los presos están condenados. Los prisioneros 2, 3 y 7 van a hallar su papel, pero el resto no. Entonces, con esta estrategia, los prisioneros se salvan si el loop más largo tiene longitud menor a 5.

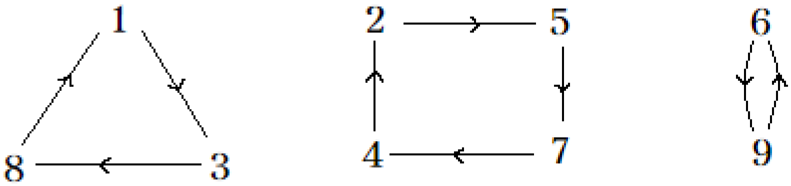

Figura 7

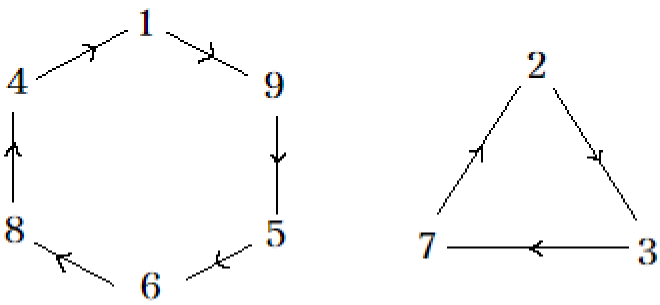

Figura 8

En ambas figuras me olvidé de poner el 10 pero pueden pensar que en todos estos casos ficticios es un loop de un solo número y que lo obviamos de la figura.

El problema se reduce a contar la cantidad de formas que tenemos de que el loop más largo no exceda cierta longitud. Primero, veamos cuantas configuraciones (Ω) totales tiene el sistema. Tenemos que ver cuantas formas tenemos de acomodar 10 papeles en 10 cajones. Si ya hicieron la guía, les va a resultar obvio que $\Omega = 10!$. Si no piensenlo así, el papel 1 lo puedo acomodar en 10 cajones. El papel 2 ahora lo puedo acomodar en 9, y así. Ahora, veamos por ejemplo, cuantas formas tenemos de armar un loop de longitud 10. Dos loops posibles son los siguientes: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 1$ y $1 \to 5 \to 9 \to 7 \to 8 \to 2 \to 10 \to 6 \to 4 \to 3 \to 1$.

Viendolo así, uno estaría tentado a decir que tenemos 10! formas de armar loops de longitud 10. Pero eso no es verdad, porque el loop $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 1$ es el mismo que el loop $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 1 \to 2$. Hay diez loops equivalentes a este, y para no contar dos veces, la cantidad de formas de armar un loop de longitud 10 es $\Omega(10) = \frac{10!}{10}$. Así, la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud 10 es:

$$P(10) = \frac{\Omega(10)}{\Omega} = \frac{1}{10}. \tag{8}$$

Ahora, veamos la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud 9. Para eso, primero tenemos que elegir 9 números entre 10 para que participen del loop. Tenemos $\binom{10}{9}$ formas de elegirlos. Luego, tenemos que contar la cantidad de formas que tenemos de acomodarlos, que será 9!. Nuevamente, tenemos que dividir por 9 para no contar dos veces. Entonces $\Omega(9) = \binom{10}{9}\frac{9!}{9} = \frac{10!}{9}$. Así, la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud 9 es:

$$P(9) = \frac{\Omega(9)}{\Omega} = \frac{10!}{10!9} = \frac{1}{9}. \tag{9}$$

Para fijar ideas, calculemos la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud 8. De nuevo, hay que elegir los 8 números que participan en el loop, $\binom{10}{8}$. Luego hay que ver la cantidad de formas que tenemos de acomodarlos dentro del loop (8!) y dividir por 8 para no contar dos veces. Además, tenemos que multiplicar por la cantidad de formas que tenemos de acomodar los 2 números restantes (2!). De esta manera

$$\Omega(8) = \binom{10}{8}\frac{8!2!}{8} = \frac{10!}{8}, \tag{10}$$

y

$$P(8) = \frac{\Omega(8)}{\Omega} = \frac{10!}{10!8} = \frac{1}{8}. \tag{11}$$

Esto se puede probar para una longitud cualquiera de una forma más general, pero me pareció más oportuno ir haciendo la construcción paso por paso. Entonces, sabemos que la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud n, será $P(n) = \frac{1}{n}$. ¡Ojo! Esta forma de contar vale siempre que el loop más largo que estemos considerando sea mayor a 5. Si queremos armar un loop de 4, no podemos acomodar los 6 números restantes de cualquier manera, ya que no pueden formar un loop de longitud 5 o 6.

Para esclarecer la notación de acá en adelante vamos a definir el suceso A como "los prisioneros se salvan". Entonces, la probabilidad de que no se salven es la probabilidad de que el loop más largo tenga longitud mayor a 5. Así,

$$P(A) = \sum_{i=6}^{10} P(i) = \sum_{i=6}^{10} \frac{1}{i} \approx 0{,}65, \tag{12}$$

y

$$P(A) = 1 - P(A) \approx 0{,}35. \tag{13}$$

El panorama sigue siendo desfavorable para los prisioneros, pero ya no es tan desesperazador como al principio, que sólo tenían una probabilidad de $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 1 \times 10^{-3}$. El problema con 100 prisioneros se resuelve de la misma manera, en este caso

$$P(A) = \sum_{i=51}^{100} \frac{1}{i} \approx 0{,}69 \tag{14}$$

y

$$P(A) \approx 0{,}31. \tag{15}$$

Veamos qué pasa si hacemos que el número de prisioneros $2n$ (debe ser par así abren la mitad de las cajas) tienda a infinito:

$$P(A) = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \approx \int_{n+1}^{2n} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{2n}{n+1}\right) \to \ln(2) \approx 0{,}69. \tag{16}$$