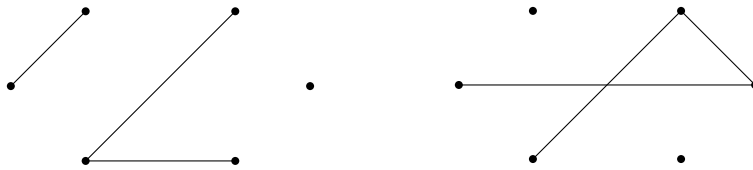


Primer Parcial de Física Teórica 3

10/5/2023

Problema 1

Un grafo es un conjunto de vértices o nodos, donde distintos pares de nodos pueden estar unidos por aristas. Los estados del grafo se especifican diciendo qué pares de nodos están unidos por una arista, de manera que los nodos son distinguibles y las aristas indistinguibles. En la figura se muestran dos estados posibles de un grafo con 6 nodos y 3 aristas.



Considere un grafo con K nodos, y suponga que cada arista tiene una energía $\epsilon > 0$.

- ¿Cuál es la máxima cantidad posible de aristas, es decir, el número N de pares de nodos?
- Calcule la entropía del grafo como función del número M de aristas, en el ensamble microcanónico. Suponga que $M, N - M \gg 1$. A partir de su resultado, obtenga la energía E del grafo en función de su temperatura T , y gráfiquela cualitativamente.
- Vuelva a calcular E en función de T , pero ahora en el ensamble canónico. Compruebe que recupera el mismo resultado del ítem anterior. ¿Hay alguna división del sistema en términos de la cual la función de partición canónica factorice?
- El grado g de un nodo es la cantidad de aristas que se conectan a él. Para un nodo cualquiera del grafo, escriba la distribución de probabilidad para los distintos valores de g en el ensamble canónico. ¿Cuál es el valor medio $\langle g \rangle$, en función de T ?

Problema 2

Un recipiente está dividido en $2N$ celdas, de las cuales N son de tipo A y las N restantes son de tipo B . Cada celda puede albergar como máximo una partícula; una celda vacía tiene energía 0, y una celda ocupada tiene energía ϵ_A si es de tipo A y ϵ_B si es de tipo B , con $0 < \epsilon_A < \epsilon_B$. El recipiente contiene N partículas indistinguibles de spin $1/2$. El spin puede apuntar hacia arriba o hacia abajo, sin que eso afecte a la energía. En la figura se muestra, a modo de ejemplo, un estado posible en el caso $N = 8$.

	↑		↑
↓	↑		↓
		↓	↓
	↑		

- (a) Calcule, en términos de la fugacidad, la función de partición grancanónica del subsistema formado por las celdas de tipo A , y haga lo mismo con las celdas de tipo B .
- (b) Calcule el número de partículas en las celdas de tipo A y el número de partículas en las celdas de tipo B . Grafique sus resultados en función de la temperatura, y discuta los límites de temperaturas altas y bajas.
- (c) ¿Cuál es la entropía de este sistema a temperatura 0 ? Discuta.

Problema 3

Un gas diluido formado por N partículas de masa m está contenido en un recipiente cilíndrico de radio R y altura h . Las partículas están sometidas al potencial

$$\phi(r) = -\kappa \log(r/R),$$

donde r es la distancia al eje del cilindro y κ es una constante positiva. El gas se encuentra en equilibrio a temperatura T .

- (a) ¿Cuál es la función de distribución del gas? Compruebe que satisface la ecuación de Boltzmann.
- (b) En una de las tapas del cilindro se practica un agujero circular centrado, de radio $R_0 < R$ (nótese que el agujero no tiene por qué ser pequeño). ¿Cuántas partículas escapan por unidad de tiempo? Discuta qué ocurre en los límites $\kappa \rightarrow 0$ y $\kappa \rightarrow \infty$.