

Grupo de Renormalización

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 14, N. Goldenfeld Cap. 9.

» Idea

Formalizar la relación entre la divergencia de ξ y la hipótesis de escaleo de Kadanoff, y dar un mecanismo de cálculo de los exponentes críticos.

Dos pasos:

1. Realización concreta de la transformación de “grano grueso” (coarse-graining).
2. Identificar el origen de la singularidad.

$$\mathcal{H} = -\beta H = \sum_n K_n \Theta_n\{S\}$$

K_n : ctes de acoplamiento
 $\Theta_n\{S\}$: operadores locales

¿Cómo cambia \mathcal{H} ante esta agrupación de grados de libertad, en un bloque de dimension lineal la ?

$$K' := \mathcal{R}_l[K], l > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} K' = \mathcal{R}_{l_1}[K] \\ K'' = \mathcal{R}_{l_2}[K'] \end{array} \right\} \mathcal{R}_{l_1 l_2}[K] = \mathcal{R}_{l_1}[\mathcal{R}_{l_2}[K]]$$

$$Z_N[K] = \text{Tr} e^{\mathcal{H}} \quad g[K] := \frac{1}{N} \ln Z_N[K]$$

Reducimos un factor ℓ^d , i.e, $N' = N/\ell^d$ descritos por $\{S'_I\}$, $I = 1, \dots, N'$

$$e^{\mathcal{H}'_{N'}[K', S'_I]} = \text{Tr}' \left[e^{\mathcal{H}_N[K, S]} \right] \quad \text{mantengo fijo } S'_I \text{ al trazar}$$

$$= \text{Tr} \left[P(s_i, S'_I) e^{\mathcal{H}[K, s_i]} \right] \quad \text{libero traza a cambio de proyector } P$$

Ejemplo

Agrupo espines con lado impar
 $(2\ell + 1)a$

Propiedades P

1. $P(s_i, S_I) > 0$
2. $P(s_i, S_I)$ tiene las mismas simetrías que \mathcal{H}
- 3.

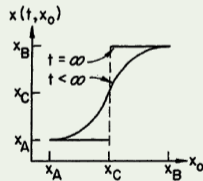
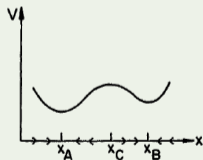
$$\sum_{S_I} P(s_i, S_I) = 1$$

Recuperamos L. Kadanoff

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} \ln Z_N[K] &= \frac{\ell^d}{\ell^d N} \ln Z_{N'}[K'] \\ &= \frac{\ell^{-d}}{N'} \ln Z_{N'}[K'] \end{aligned} \right\} \rightarrow g[K] = \ell^{-d} g[K']$$

¿Cómo puede haber un comportamiento singular?

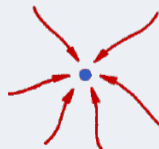
Pero, solo en el límite termodinámico puede haber un comportamiento singular.



Analogía con sistemas dinámicos.

» Los puntos fijos

Un punto fijo K^* es tal que $K^* = \mathcal{R}_\ell[K^*]$, pero que pasa entonces con la correlación ξ en ese punto.



Variedad crítica

» Flujos de RG en el entorno del punto fijo

$$\left. \begin{aligned} K_n &= K_n^* + \delta K_n, & \mathcal{H}^* &= \mathcal{H}[K^*] \\ K'_n &= K'_n[K] \equiv K_n^* + \delta K'_n = K_n^* + \sum_m \left. \frac{\partial K'_n}{\partial K_m} \right|_{K^*} \delta K_m + \mathcal{O} \end{aligned} \right\} \delta K'_n = \sum_m \mathcal{A}_{nm} \delta K_m$$

Entonces conviene diagonalizar (si se puede..),

$$\mathcal{A}^{(\ell)} \phi_\sigma = \lambda_\sigma^{(\ell)} \phi_\sigma \quad \text{pero debe ser ademas} \quad \mathcal{A}^{(\ell)} \mathcal{A}^{(\ell')} = \mathcal{A}^{(\ell\ell')}$$

con lo cual

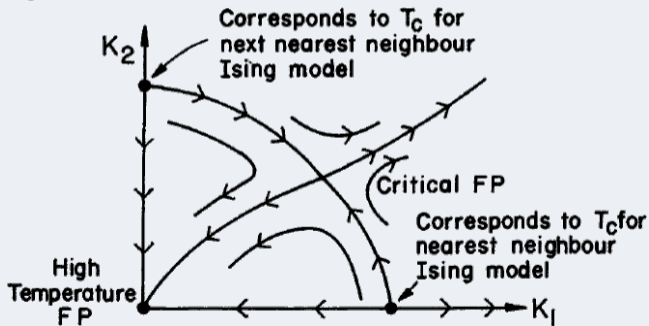
$$\lambda_\sigma^{(\ell)} \lambda_\sigma^{(\ell')} = \lambda_\sigma^{(\ell\ell')} \Rightarrow \lambda_\sigma^{(\ell)} = \ell^\nu \sigma$$

En la base de autovectores,

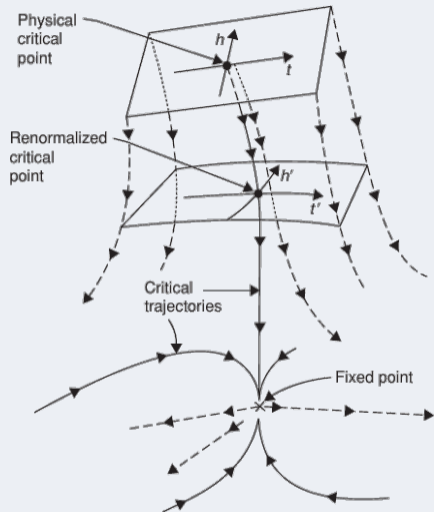
$$\delta K' = \mathcal{A} \cdot \delta K = \mathcal{A} \cdot \sum_\sigma u_\sigma \phi_\sigma = \sum_\sigma u_\sigma \lambda_\sigma \phi_\sigma$$

Pueden pasar varias cosas:

- $|\lambda_\sigma| > 1, y_\sigma > 0$, entonces u_σ crece con ℓ (relevantes!)
- $|\lambda_\sigma| < 1, y_\sigma < 0$, entonces u_σ disminuye con ℓ (irrelevantes).
- $|\lambda_\sigma| = 1$, marginales.



[N. Goldenfeld]



[R. K. Pathria & P. D. Beale]

» El origen del escaleo

Caso más sencillo, una constante de acoplamiento sola ($K = J/k_B T$)

» Y la energía libre

$$g(t) = \ell^{-d} g(t') \quad \Rightarrow \quad g(t) = \left(\frac{t}{b}\right)^{d/y_t} g(b)$$

Derivamos 2 veces y comparamos con $C \sim t^{-\alpha}$

$$\frac{d}{y_t} = 2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 2 - \alpha = \nu d$$