Física Teórica 3 − segundo cuatrimestre de 2023

Guía 4: *Transporte*

(Algunas integrales útiles figuran en la última página).

1. **Leyes de conservación**. Si una cantidad $\chi(\mathbf{r},\mathbf{p})$, asociada a cada partícula, se conserva en las colisiones binarias, es decir, si $\chi_1' + \chi_2' = \chi_1 + \chi_2$, entonces es posible deducir leyes de conservación para las soluciones de la ecuación de Boltzmann. La forma de estas leyes es la siguiente (Huang §5.3):

$$\int dp^3\, \chi(\mathbf{r},\mathbf{p}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla + \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\cdot\nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = 0. \tag{1}$$

La ley de conservación más elemental es la del número de partículas; la función $\chi = 1$ lleva la cuenta del número de partículas antes y después de la colisión. Si cada integral de las que aparecen en (1) se identifica con el valor medio o con la corriente de alguna de las variables macroscópicas, la forma final de la ley de conservación puede interpretarse como una ecuación de continuidad.

Demostrar que para $\chi = 1$, $\chi = \mathbf{p}$ y $\chi = p^2/2m$ resultan las siguientes ecuaciones de continuidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\,\mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(nm\mathbf{u}) + \nabla\cdot\mathbf{\Theta} = n\,\langle \mathbf{F}\rangle, \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}_\epsilon = n\left\langle \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\mathbf{F}\right\rangle, \tag{2}$$

donde n es la densidad, $\mathbf{u}$ es la velocidad media y

$$\Theta_{ij} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m}\, f, \qquad \epsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\, f, \qquad \mathbf{j}_\epsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\,\frac{\mathbf{p}}{m}\, f. \tag{3}$$

Interpretar físicamente cada término. *Ayudas para los cálculos*: i) la derivadas respecto del tiempo y de la posición pueden sacarse fuera de la integral; ii) el término con la fuerza $\mathbf{F}$ puede integrarse por partes; iii) suponga que la fuerza exterior cumple $\nabla_{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{F} = 0$; en particular demuestre que esta condición incluye el caso de la fuerza de Lorentz.

2. **Aproximaciones de equilibrio local y de tiempo de relajación**. La aproximación de equilibrio local corresponde a asumir que la función de distribución del gas es una distribución de Maxwell−Boltzmann local más una corrección δf,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= f_0(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \\ &= \frac{n(\mathbf{r},t)}{[2\pi mkT(\mathbf{r},t)]^{3/2}}\, \exp\left[-\frac{|\mathbf{p} - m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)|^2}{2mkT(\mathbf{r},t)} \right] + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \end{aligned} \tag{4}$$

con tres condiciones suplementarias que fijan los valores de $n, \mathbf{u}$ y T, a saber,

$$\int d^3p\, \delta f = 0, \qquad \int d^3p\, \mathbf{p}\, \delta f = 0, \qquad \int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\, \delta f = 0. \tag{5}$$

a) Calcular la corriente de partículas $\mathbf{j}$, el tensor de esfuerzos Θ_{ij} y la densidad de flujo de energía $\mathbf{j}_\epsilon$ asociados a la aproximación de más bajo orden $f \simeq f_0$.

b) Demostrar que las tres condiciones (5) significan que las funciones n y $\mathbf{u}$ que aparecen en f_0 son la densidad y la velocidad media exactas, y mostrar que la densidad de energía cinética exacta es

$$\epsilon = \tfrac{3}{2}nkT + \tfrac{1}{2}nmu^2, \tag{6}$$

lo que define T en general.

El integrando en el término de colisiones de la ecuación de Boltzmann es cuadrático en f,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} = \int d^3p_1' d^3p_2' d^3p_2\, \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2')\delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') \\ \times |T_{fi}|^2 \left(f_2' f_1' - f_2 f_1\right).\end{aligned} \tag{7}$$

c) Demostrar por cálculo directo que cualquier distribución de Maxwell–Boltzmann local, con funciones T, $\mathbf{u}$ y n arbitrarias, reemplazada en el término de colisiones integra a cero.

Antes hemos definido $f = f_0 + \delta f$, así que la combinación de funciones f que aparece en el término de colisiones (7) puede escribirse como

$$f_2' f_1' - f_2 f_1 = (f_{02}' f_{01}' - f_{02} f_{01}) + \delta f_2'\, f_{01}' + f_{02}'\, \delta f_1' - \delta f_2\, f_{01} - f_{02}\, \delta f_1 + \delta f_1'\, \delta f_2' - \delta f_2\, \delta f_1. \tag{8}$$

El ítem (c) muestra que el término de orden cero no contribuye a la integral de colisiones. De los otros términos, a más bajo orden se pueden omitir los que son cuadráticos en δf, conservando sólo los que son lineales. De esta forma puede estimarse que $(\partial f/\partial t)_{\text{col}} \sim \delta f$. Esto motiva la aproximación de tiempo de relajación:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} \simeq -\frac{\delta f}{\tau}, \tag{9}$$

donde $\tau(\mathbf{r}, t)$ es un tiempo microscópico característico, mucho menor que la escala de evolución macroscópica del sistema. Finalmente, la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -\frac{\delta f}{\tau}. \tag{10}$$

d) Mostrar que, a más bajo orden en τ, puede escribirse

$$\delta f = -\tau \left[\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_0\right]. \tag{11}$$

No suele ser necesario calcular δf de manera explícita, debido a que lo que importa son las corrientes y densidades, es decir, integrales de δf sobre el impulso. Al reemplazar la expresión (11) en estas integrales ocurren dos cosas: i) la derivada respecto del tiempo y el gradiente respecto a la posición pueden sacarse fuera de las integrales (evitando tener que calcular los muchos términos de las derivadas de una función que depende de $\mathbf{r}$ y t a través de la composición de muchas otras funciones), ii) el gradiente respecto del impulso puede integrarse por partes (trasladando el peso de las derivadas a simples funciones del impulso, en vez de la gaussiana).

e) Suponga que el régimen es estacionario y que no hay fuerzas externas.

   i) Demostrar que las tres condiciones (5) implican a orden τ

   $$\nabla\cdot(n\mathbf{u})=0,\qquad mn(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla(nkT)=0,\qquad (\mathbf{u}\cdot\nabla)\left(\tfrac{5}{2}kT+\tfrac{1}{2}mu^2\right)=0,\quad (12)$$

   y que son equivalentes, vía el ítem (a), a la conservación exacta del número de partículas y a la conservación a orden más bajo del impulso y de la energía, respectivamente. Estas igualdades se usan en los ítems que siguen.

   ii) Calcular el tensor de flujo de impulso Θ_{ij} hasta orden τ, es decir, usando la distribución (4) y la corrección δf dada por (11), con $\partial f_0/\partial t=0$ y $\mathbf{F}=0$. El resultado al que se debe llegar es

   $$\Theta_{ij}=n\Big[kT\delta_{ij}+mu_iu_j\Big]-\tau n\Big[\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)(kT)\,\delta_{ij}+kT\,(\partial_iu_j+\partial_ju_i)\,\Big].\qquad (13)$$

   El factor que acompaña al término $(-\partial_iu_j-\partial_ju_i)$ es la viscosidad, $\eta=\tau nkT$.

f) Bajo las mismas condiciones que antes, pero suponiendo además que el fluido está en reposo, calcule $\mathbf{j}_\epsilon$ hasta orden τ. El resultado al que se debe llegar es

$$\mathbf{j}_\epsilon=-\left(\frac{5\tau nk^2T}{2m}\right)\nabla T.\qquad (14)$$

El coeficiente que multiplica a $(-\nabla T)$ es la conductividad térmica κ.

g) Halle el cociente $\kappa/(C_V\eta)$, donde C_V es la capacidad calorífica por unidad de masa a volumen constante, y verifique que es una constante numérica universal. Al respecto ver Dalvit *et al.*, págs. 261–262; Huang 2da. ed. pág. 108.

3. La situación general del problema es la siguiente: un gas está en reposo, en régimen estacionario, sin fuerzas externas y con una temperatura y una densidad levemente inhomogéneas. Usando la aproximación de equilibrio local y de tiempo de relajación, encontrar las ecuaciones que determinan la densidad de partículas y la temperatura. Deberá proponer una forma explícita para τ, basándose en el modelo más simple de colisiones que pueda imaginar. En particular, considere la situación en la que el gas está entre dos placas infinitas paralelas separadas una distancia L. La temperatura de una de las placas es T_0 y la de la otra placa es T_1. Sobre la primera placa la densidad es n_0. Encontrar T y n como funciones de la posición. Comparar con la solución aproximada que resulta de la simple interpolación lineal.

Algunas integrales útiles

Si f es la distribución de Maxwell—Boltzmann centrada en $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u} = 0$,

$$f(p) = \frac{n}{(2m\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right),$$

entonces:

$$\int d^3p\ f(p) = n,$$

$$\int d^3p\ p_i p_j\ f(p) = \delta_{ij} mnkT,$$

$$\int d^3p\ p_i p_j p_k p_l\, f(p) = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})\ n(mkT)^2,$$

$$\int d^3p\ p^s\ f(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(2mkT)^{s/2}\, n\, \Gamma\left(\tfrac{s+3}{2}\right).$$

Notar que la integral de un número impar de componentes del impulso siempre es cero, por simetría. Si se trata de hacer integrales con $m\mathbf{u} \neq 0$, es decir, con la gaussiana no centrada de la Ec. (4), hay que hacer el cambio de variable $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + m\mathbf{u}$, que centra la gaussiana pero desplaza las componentes del impulso que se están promediando, lo que da lugar a integrales de órdenes más bajos.