Gas de Bose

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 7.

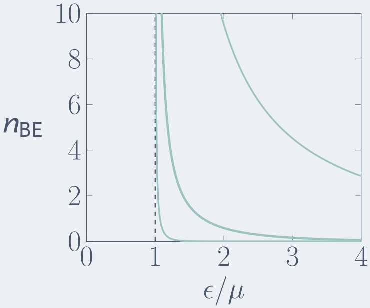
» Gas de partículas idénticas

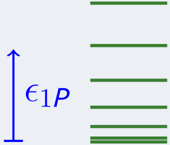
Para bosones,i.e., spin entero, idénticos, la función de partición

$$\ln Z_{GC} = -\sum_{1P} \ln\left[1 - \underbrace{ze^{-\beta\epsilon_{1P}}}_{<1 \Rightarrow \mu \leq \epsilon_{1P}}\right]$$

Gran Potencial $\quad -\beta\Omega = \ln Z_{GC} \qquad \beta pV = \ln Z_{GC}$

$$n_{\text{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$





» Ocupación del estado fundamental

Llamamos $N_0 = n_{\text{BE}}(\epsilon = \epsilon_0)$

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0-\mu)} - 1} = \frac{1}{\widetilde{z}^{-1} - 1} = \frac{\widetilde{z}}{1-\widetilde{z}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{z} = \frac{N_0}{N_0+1} = 1 - \frac{1}{N_0+1} < 1$$

¿Es siempre válido hacer el reemplazo $\sum_{1P}() \to \int()$?

» El gas en 3D con $H = p^2/(2m)$

La ecuación de estado,

$$\beta p V = \ln Z_{GC} = -\ln(1-\tilde{z}) - {\sum_{p}}' \ln\left(1 - z e^{-\beta p^2/(2m)}\right)$$

$$-{\sum_{p,s}}' \ln\left(1 - z e^{-\beta p^2/(2m)}\right) = -\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} g_s \int d^3p \ln\left(1 - z e^{-\beta p^2/(2m)}\right)$$

$$= -\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} g_s \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \ln\left(1 - z e^{-\beta p^2/(2m)}\right)$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} g_s \int_0^\infty 4\pi \frac{p^3}{3} \frac{z e^{-\beta p^2/(2m)}}{1 - z e^{-\beta p^2/(2m)}} \frac{\beta p}{m}$$

$$= \boxed{g_s \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z)}$$

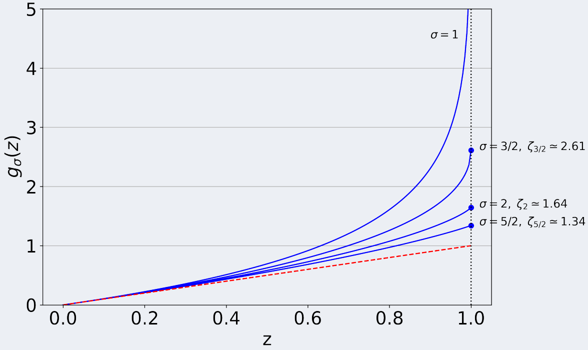
» Las funciones de Bose

Análogamente a las de Fermi,

$$g_\sigma(z) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} = \sum_{l \geq 1} \frac{z^l}{l^\sigma}$$

Propiedades

- $g_\sigma(z) \simeq z$ para $z \ll 1$ (límite clásico).
- $g'_\sigma(z) = g_{\sigma-1}(z)/z$.
- $g_\sigma(z) < g_{\sigma-1}(z)$.



$$\beta p V = g_s \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - g_s \ln(1-z) \qquad U = \frac{3}{2} g_s k_B T V g_{5/2}(z)$$

$$N = N_0 + g_s \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$$

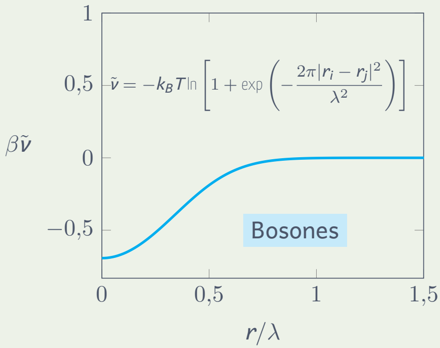
La presión

A alta T, $g_\sigma \sim z$

$$\frac{pV}{N} = k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \sim k_B T$$

A baja T, $z \lesssim 1$

$$\frac{pV}{N k_B T} = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} < 1$$



» La condensación de Bose-Einstein

Reescribamos la ecuación de N

$$\frac{n\lambda^3}{g_s} = g_{3/2}(z) + \frac{\lambda^3}{V}\frac{N_0}{g_s}$$

A T constante

Podemos aumentar el N del sistema,

$$n_c(T) = \frac{\zeta_{3/2} g_s}{\lambda^3} \propto T^{3/2}$$

A N constante

Podemos bajar T del sistema,

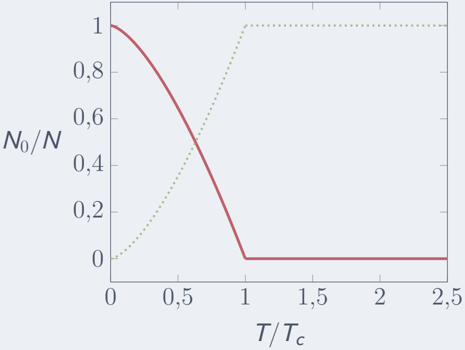
$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi\, m\, k_B} \left(\frac{n}{\zeta_{3/2}\, g_s} \right)^{2/3} \propto n^{2/3}$$

» La fracción condensada

$$N = N_0 + N_{\text{ex}}, \qquad N_{\text{ex}} = g_s \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z), \qquad \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{g_{3/2}(z)}{n\lambda^3/g_s}$$

Para un sistema macroscópico,

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{T}{T_c(n)}\right]^{3/2} & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases}$$



» El calor específico

Veamos el calor específico en un sistema macroscópico, en donde $U = \frac{3}{2} pV$

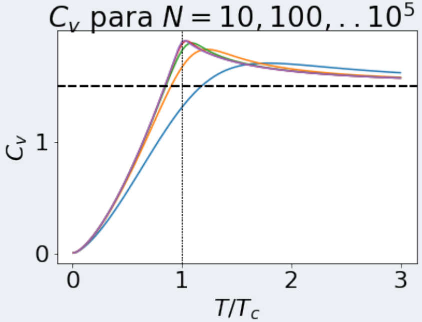
Si hay condensado importante ($T \ll T_c$)

$$z = 1 - \frac{1}{N_0 + 1} \simeq 1$$

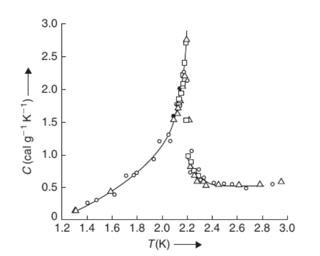
$$p = \frac{g_s}{\lambda^3} k_B T \zeta_{5/2} \propto T^{5/2} \quad \Rightarrow \quad U/N \propto T^{5/2} \quad \text{Por lo tanto} \quad C_v^{\text{BE}} \propto T^{3/2}.$$

Si no hay condensado

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

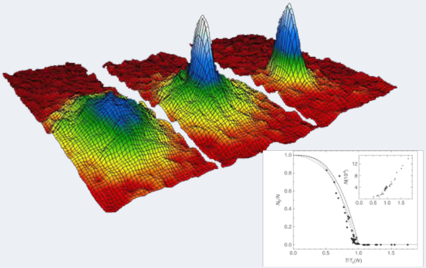

C_v para $N = 10, 100, ..10^5$
C_v
0
1
0
1
2
3
T/T_c

» Realizaciones experimentales



Experimentos en ^{4}He alrededor 1930-1940.

- Similitud en la forma del C_v
- Relación entre superfluidez y condensación de Bose-Einstein.
- El ^{4}He es un líquido cuántico (interactuante!).



Experimentos en gases de átomos ultra fríos (1995+)

- Interacciones débiles (pero con efectos visibles).
- Sistemas confinados, $V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.
- Condensados casi puros.

» ¿Cómo lo tratamos en general?

Si tenemos un sistema de partículas (bosones o fermiones), con un espectro arbitrario también podemos.

$$g(\epsilon) = \sum_{1P} \delta(\epsilon - \epsilon_{1P})$$

Aproximaciones, expansiones de

$$Z_1(\beta) = \sum_{1P} e^{-\beta\epsilon_{1P}} = \int g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}\, d\epsilon$$

Aproximaciones del continuo, si $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$

$$\frac{d^3p\, d^3r}{h^3} = g(\epsilon) d\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{g(\epsilon) = \int \frac{d^3p\, d^3r}{h^3}\, \delta\left(\epsilon - H(r,p)\right)}$$