

Aplicaciones del Gas de Fermi

Lectura: R. K. Pathria & P. D. Beale, Cap. 8., Landau Cap. 5.

» Gas de Fermi

$$Z_{GC} = \prod_i (1 + ze^{-\beta\epsilon_i})$$

Gran Potencial $-\beta\Omega = \ln Z_{GC}$

$\beta pV = \ln Z_{GC}$

$$\Omega = -pV$$

$$= \sum_{1P} \ln (1 + 1ze^{-\beta\epsilon_{1P}})$$

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

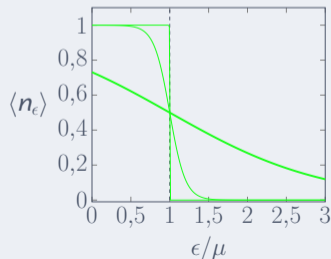
Gas libre en 3D

$$H = \sum p^2 / (2m)$$

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_s f_{3/2}(z) \quad p = \frac{k_B T}{\lambda^3} g_s f_{5/2}(z) \quad U = \frac{3}{2} pV$$

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right], \quad k_B T_F = \epsilon_F(\mu(T=0))$$

$$c_V(T) = N k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}$$



» Gas de electrones

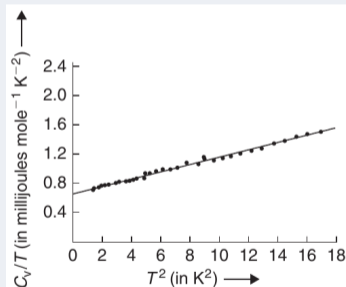
Los electrones de conducción en los metales pueden tratarse de manera efectiva como libres. Por ejemplo en el sodio, con $1e^-$ por átomo, tenemos

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \simeq 3,1 \text{ eV}, \text{ o sea una } T_F \simeq 3,5 \times 10^4 \text{ K}$$

$$c_V = \gamma T + [\delta T^3]$$

Otros sistemas

- Gases de protones, neutrones, electrones en estrellas ($T_F \sim 10^9 \text{K}$).
- Sistemas en laboratorio: ^3He líquido, gases de átomos neutros atrapados ($T_F \simeq 5 \text{K}$ ó nK .)



» Magnetismo en fermiones

Suponemos la aplicación de un campo magnético externo \mathbf{B} , con esto la energía interna

$$dU = TdS - pdV - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B} \Rightarrow \boxed{M_i = \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta B_i)}} \quad \text{donde } \mathbf{M} \text{ es la magnetización.}$$

Por un lado poseen un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu} = \mu_B \boldsymbol{\sigma}$ con $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ que se acopla con un campo externo, $H_{\text{para}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ Además, si están cargados, el movimiento orbital da lugar a otro acoplamiento, proporcional a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$
En general,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Paramagnetismo de Pauli y diamagnetismo de Landau. Sus efectos son aditivos (porque/si no hay efecto spin-órbita, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$).

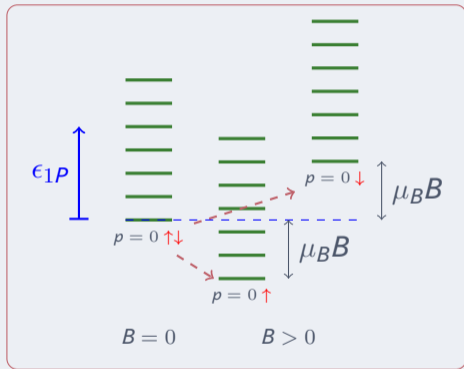
» Paramagnetismo de Pauli

Los espectros de \uparrow y \downarrow difieren, $H = \frac{p^2}{2m} - \mu \cdot B$

$$\epsilon_{p,s} = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B B \quad (\Delta\epsilon = 2\mu_B B)$$

$$\langle N \rangle = \langle N_{\uparrow} \rangle + \langle N_{\downarrow} \rangle$$

$$\langle M \rangle = \mu_B (\langle N_{\uparrow} \rangle - \langle N_{\downarrow} \rangle)$$



$$M = \mu_B \sum_p [n(\epsilon_{p\uparrow}) - n(\epsilon_{p\downarrow})]$$

» Paramagnetismo de Pauli (cont.)

Finalmente,

$$\frac{M}{V} = m = \frac{3}{2} \mu_B^2 B \frac{n}{\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] = \chi(T) B$$

En un gas clásico teníamos

$$\chi_{\text{Curie}} = \frac{C}{T}$$

» Diamagnetismo de Landau

Clasicamente, para un gas,

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!} \quad Z_1 = \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} e^{-\frac{\beta}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2} = \int \frac{d^3Q d^3P}{h^3} e^{-\frac{\beta}{2m}P^2}$$

Bohr – van Leween

Cuanticamente, los niveles son discretos. Supongamos $\mathbf{B} = B\hat{z}$ y elijamos el gauge de Landau con $\mathbf{A} = -By\hat{x}$

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{q}{c}By\hat{x} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(p_z^2 + p_y^2 + \left(\frac{qB}{c} \right)^2 y^2 + p_x^2 + \frac{2qB}{c} p_x y \right)$$

Podemos factorizar los estados $\psi = e^{ik_z z} e^{ik_x x} f(y)$

Ahora que conocemos los estados con su degeneración, podemos calcular todo

$$\begin{aligned}\ln Z_{GC} &= \sum_{1P} \ln \left(1 + z e^{-\beta E_{1P}} \right) = \frac{L}{2\pi} \int dk_z \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{L^2 B}{\Phi_0} \ln \left[1 + z e^{-\beta \hbar^2 k_z^2 / (2m)} e^{-\beta \hbar \omega_c (n+1/2)} \right] \\ &= \frac{VB}{\pi \Phi_0} \sum_{n=0}^{\infty} h[\mu - \hbar \omega_c (n + 1/2)]\end{aligned}$$

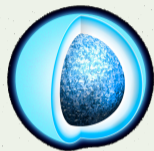
con $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \ln \left[1 + e^{-\beta \hbar^2 k_z^2 / (2m)} e^{\beta x} \right]$ Vamos a usar la aproximación de Euler - MacLaurin,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n + 1/2) \simeq \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{24} f'(0)$$

» Otras aplicaciones

Enanas blancas

- Formadas principalmente por He ionizado.
- Densas $\sim 10^7 \text{g cm}^{-3}$.
- $T \sim 10^7 \text{K}$, pero $T_F \sim 10^{10} \text{K}$
- Relativista, $\epsilon \propto p^2$.



Boltzmann

La ecuación de Boltzmann se modifica para incluir la exclusión de Pauli.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla f = \int d^3 p_1 d\Omega |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \frac{d\sigma}{d\Omega} [f_2 f_3 (1 - f)(1 - f_1) - f f_1 (1 - f_2)(1 - f_3)]$$

En equilibrio $f = \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m - \mu)} + 1}$

Número de colisiones $\mathcal{Z} = \int d^3 r d^3 p_1 d^3 p_2 d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \frac{d\sigma}{d\Omega} f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4)$