Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023

Guía 8: *modelo de Ising*

1. (Huang §14.6, Pathria y Beale §13.2). En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta. El método que se usa en este problema es el de la *matriz de transferencia*.

   a) Considere una cadena cerrada de N espines. Muestre que la función de partición es

   $$Z_N(b,K) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_N\\=\pm 1}} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1})\right],$$

   donde $b = \beta\mu B$, $K = \beta J$, y $s_{N+1} = s_1$.

   b) Muestre que $Z_N = \mathrm{Tr}(q^N)$, donde q es la matriz de 2×2 con elementos

   $$q_{ss'} = \exp\left[\frac{b}{2}(s+s') + K\,ss'\right] \qquad (s, s' = \pm 1).$$

   Ayuda: los exponentes en Z_N pueden ser reescritos de manera simétrica como

   $$\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N}\left(b\,\frac{s_i+s_{i+1}}{2} + K\,s_is_{i+1}\right).$$

   c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma $Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$, donde

   $$\lambda_\pm = e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right)$$

   son los autovalores de la matriz q.

   d) Muestre que $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln Z_N}{N} = \ln\lambda_+$.

   e) Calcule la magnetización media por espín,

   $$m(T,B) = \frac{\mu}{N}\frac{\partial \log Z_N}{\partial b},$$

   y muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B \to 0^+$, a menos que $T = 0$.

2. Para la cadena abierta sin campo: escriba la función de partición, sume explícitamente sobre el último espín y encuentre una relación de recurrencia para Z_N en términos de Z_{N-1}. Resuelva la relación de recurrencia. Verifique el resultado usando algún otro método. (Por ejemplo: considerando como variables los productos s_is_{i+1}, o adaptando el método de la matriz de transferencia). En general, las cadenas cerradas y abiertas, con y sin campo, pueden resolverse a partir de relaciones de recurrencia.

3. Para la cadena lineal en un campo B en el límite $N \to \infty$, calcule la magnetización usando la aproximación de Bethe–Peierls. Muestre que el resultado es exacto. (El álgebra es elemental pero algo farragosa. Puede usar algún programa de cálculo simbólico).

4. Considere el modelo de Ising de la cadena lineal con condiciones de contorno periódicas en un campo externo B. Para $N \gg 1$, escriba la probabilidad de que el espín j-ésimo y los $n \ll N$ espines siguientes estén todos en el mismo estado, pero con el espín $j+n+1$ en el estado opuesto. Grafique la probabilidad en función de n, variando J y B. Analice en especial el caso $B = 0$ y estime la longitud de correlación cuando $\beta J \gg 1$.

5. Para analizar la correlación entre espines de una cadena lineal, lo más sencillo es estudiar el caso con extremos abiertos y sin campo externo. Para tener acceso a los valores medios de productos de pares de espines, se definen constantes de acoplamiento J_i,

$$E = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1}.$$

La función de partición de la cadena con extremos abiertos y constantes J_i se calcula siguiendo el método recursivo del problema 2. Para calcular el valor de expectación del producto $s_l s_{l+1}$, habrá que derivar el logaritmo de la función de partición respecto de J_l. El valor medio del producto $s_l s_{l+n}$,

$$g(n) = \langle s_l s_{l+n} \rangle \, ,$$

puede calcularse de una manera análoga, notando que, como $s_i^2 = 1$,

$$s_l s_{l+n} = s_l s_{l+1} s_{l+1} s_{l+2} \dots s_{l+n-2} s_{l+n-1} s_{l+n-1} s_{l+n}.$$

Al final del cálculo todas las constantes J_i toman el mismo valor J. Calcule $g(n)$. Defina la longitud de correlación ξ escribiendo $g(n) = e^{n/\xi}$. Analice el caso $\beta J \gg 1$ y compare con la estimación del problema anterior.

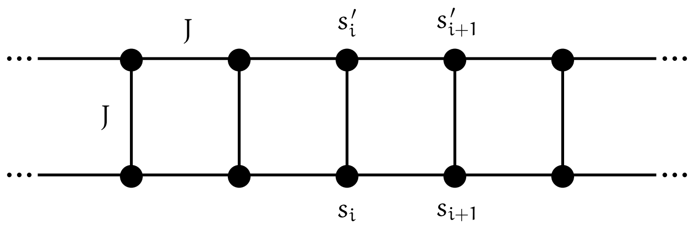
6. (Pathria 3ra. ed., problema 13.7). Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de una doble cadena Ising cerrada y sin campo externo,

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s_{i+1} + s_i' s_{i+1}' \right) - J \sum_{i=1}^{N} s_i s_i'.$$

Muestre que para $N \gg 1$

$$\frac{1}{2N} \log Z_N \simeq \frac{1}{2} \log \left[2 \cosh K \left(\cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right) \right] ,$$

donde $K = \beta J$. *Ayuda*: reescribir el término de interacción entre las cadenas de manera simétrica, $\sum_{i=1}^{N} s_i s_i' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s_i' + s_{i+1} s_{i+1}' \right)$. La matriz de transferencia será de 4×4.



7. La aproximación de campo medio más simple para el modelo de Ising con condiciones periódicas consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para un solo espín, s, reemplazando la interacción con sus γ primeros vecinos por un término efectivo de la forma $E_1 = -J\gamma s\bar{s}$, donde $\bar{s}$ es el valor medio de cualquier espín. La interacción lineal con un campo magnético externo sigue siendo $-B\mu s$. Escriba la ecuación de autoconsistencia para el valor medio del espín y encuentre la temperatura crítica, T_c, por debajo de la cual hay magnetización espontánea. Para el caso $\gamma = 4$, compare esta solución con el valor exacto, $kT_c = -2J/\log(\sqrt{2}-1)$.

8. En la aproximación de campo medio para un solo espín del problema anterior, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:

    a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^{\beta}$ para $T \to T_c^-$.

    b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.

    c) La susceptibilidad magnética $\chi_T(T, B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)^{-\gamma}$ para $T \to T_c^-$.

9. Una segunda aproximación de campo medio consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para dos espines vecinos, s_1 y s_2, conservando de manera exacta su interacción mutua, pero reemplazando los espines de los otros sitios vecinos por su valor medio $\bar{s}$. Hallar la ecuación de autoconsistencia para el valor de expectación $\bar{s}$ y con ella una expresión para T_c. Encontrar (numéricamente si es necesario) el valor de T_c para la red cuadrada y comparar con el resultado exacto y con el obtenido en la aproximación de campo medio para un solo espín.

10. Encontrar numéricamente la temperatura crítica para una red cuadrada en una aproximación de campo medio en donde la interacción de cuatro espines en una celda fundamental sea descripta de manera exacta. Comparar con el resultado exacto y con las aproximaciones de los problemas anteriores.

11. Ídem al anterior, pero en un modelo de campo medio que incluya exactamente las interacciones de toda una hilera de espines, como en el problema 1.

12. Ídem al anterior, pero en un modelo de campo medio que incluya exactamente las interacciones de dos hileras vecinas de espines, como en el problema 6.