Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023

Guía 9 (actualizada): *Fenómenos críticos y grupo de renormalización*

1. La energía libre de Landau para un ferromagneto en presencia de un campo externo es:

$$f(m, T) = -hm + a(T)m^2 + \tfrac{1}{2}b(T)m^4. \tag{1}$$

   a) Asumiendo que existe T_c tal que la magnetización espontánea es nula para $T > T_c$ y no nula para $T < T_c$, ¿qué condiciones deben cumplir $a(T)$ y $b(T)$?

   b) Sea $a(T) = (T - T_c)a_0$ y $b(T) = b_0$, con a_0 y b_0 mayores que cero. Cuando la temperatura es cercana a T_c quedan definidos los siguientes comportamientos asintóticos:

$$\begin{aligned} &m(T) \sim (T_c - T)^{\beta}, \qquad \text{para } T < T_c \text{ y } h = 0,\\ &c(T) \sim |T - T_c|^{-\alpha}, \qquad \text{para } h = 0,\\ &\chi(T) = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h=0} \sim |T - T_c|^{-\gamma},\\ &m(h) \sim h^{1/\delta}, \qquad \text{para } T = T_c. \end{aligned}$$

   Calcule los exponentes críticos asociados a la energía libre de Landau.

2. Usando la aproximación de Bragg–Williams, calcular la energía libre de Helmholtz como función de la magnetización para una red de Ising con γ primeros vecinos y constante de interacción J. Mostrar explícitamente que, cuando $m \ll 1$, se obtiene una energía libre por espín de la forma (1), donde el coeficiente a es proporcional a $T - T_c$.

3. (Pathria 3ra. ed., problema 12.20). Considere un sistema sin campo externo cuya energía libre de Landau incluye un término proporcional a m^6,

$$f(m, T) = r(t)m^2 + s(t)m^4 + um^6,$$

   donde u es una constante positiva. Minimizando f respecto de m, estudie la magnetización espontánea m_0 en función de los parámetros r y s. En particular muestre que:

   a) Para $r > 0$ y $s > -(3ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ es la única solución real.

   b) Para $r > 0$ y $-(4ur)^{1/2} < s \leqslant -(3ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $\pm m_1$, donde $m_1 = \frac{\sqrt{s^2 - 3ur} - s}{3u}$. Sin embargo, el mínimo de f en $m_0 = 0$ es menor que el par de mínimos en $\pm m_1$, de manera que, en última instancia, el valor de equilibrio es $m_0 = 0$.

   c) Para $r > 0$ y $s = -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $\pm(r/u)^{1/4}$. ¿Cómo se comparan las estabilidades relativas de cada mínimo?

   d) Para $r > 0$ y $s < -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $m_0 = \pm m_1$. El valor mínimo de f ahora es alcanzado en $\pm m_1$, lo que implica una transición de fase de primer orden, puesto que la diferencia entre $m_0 = 0$ y m_1 es finita. En el plano sr, la línea $s = -(4ur)^{1/2}$, con $r > 0$, es usualmente caracterizada como una "línea de transiciones de fase de primer orden".

e) Para $r = 0$ y $s < 0$, $m_0 = \pm(2|s|/3u)^{1/2}$.

f) Para $r < 0$, $m_0 = \pm m_1$ para todo s. Cuando $r \to 0$, $m_1 \to 0$ si $s > 0$.

g) Para $r = 0$ y $s > 0$, $m_0 = 0$ es la única solución. Junto con el resultado del ítem anterior, esto implica que la línea $r = 0$, con $s > 0$, es una "línea de transiciones de fase de segundo orden", puesto que los dos estados disponibles difieren en un valor de m arbitrariamente pequeño. Las líneas de primer y segundo orden se cruzan en el punto $r = s = 0$, situación que se caracteriza diciendo que este es un punto tricrítico.

4. La teoría de Ginzburg–Landau se usa para estudiar fluctuaciones de un sistema cerca de un punto crítico. En esta teoría, el parámetro de orden depende de la posición. Para un ferromagneto en ausencia de campo externo, la energía libre de Ginzburg–Landau es

$$F[m(\mathbf{r}), T] = \int d^3r \left\{ c\, [\nabla m(\mathbf{r})]^2 + a m(\mathbf{r})^2 + b m(\mathbf{r})^4 \right\},$$

donde a, b y c son funciones de la temperatura, con b y c mayores que cero.

a) Pruebe que los extremos de esta energía libre están determinados por la ecuación

$$c\nabla^2 m = am + 2bm^3.$$

b) Suponiendo $a < 0$ y que la magnetización sólo depende de la coordenada x, encuentre una familia de soluciones tales que $m(x) \to \pm\sqrt{-a/(2b)}$ cuando $x \to \pm\infty$. Discuta cualitativamente la solución. *Ayuda:* resuelva la ecuación diferencial en el único caso en el que es fácil resolverla.

5. [A. Hankey and H. E. Stanley, Phys. Rev. B **6**, 3515 (1972)]. Sea $\lambda > 0$.

a) Se dice que una función de una variable es homogénea si satisface $f(\lambda x) = g(\lambda) f(x)$. Demuestre que $g(\lambda) = \lambda^p$ para algún p.

b) Análogamente, una función de dos variables es homogénea si cumple que $f(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda) f(x, y)$. Demostrar que $g(\lambda) = \lambda^p$ para algún p.

c) Una función homogénea generalizada de dos variables cumple que $f(\lambda^a x, \lambda^b y) = g(\lambda) f(x, y)$. Demostrar que $g(\lambda)$ es igual a λ^c para algún c. Demostrar también que

$$f(x, y) = |x|^{c/a} g_\pm\big(y/|x|^{b/a}\big),$$

donde g_+ corresponde a $x > 0$ y g_- a $x < 0$. (Notar que hay sólo dos exponentes independientes, c/a y b/a, lo que corresponde al hecho de que c puede elegirse siempre igual a 1 redefiniendo a y b.)

■ Grupo de renormalización

6) Considere una cadena de Ising lineal, cerrada, con $N = 2^k$ espines. El conjunto de todos los espines, $\{s_i\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$, puede separarse en los espines que ocupan posiciones pares y los espines que ocupan posiciones impares:

$$\{s_i\} = \{s_{2i}\} \cup \{s_{2i+1}\}. \tag{2}$$

El hamiltoniano es una función del conjunto de todos los espines,

$$\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K) = -\beta H(\{s_i\}, b, K) = b \sum_{i=1}^{N} s_i + K \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}, \tag{3}$$

con $s_{N+1} = s_1$. La distribución de probabilidad en el ensamble canónico es

$$P(\{s_i\}, b, K) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)}}{Z(N, b, K)}, \tag{4}$$

donde la función de partición está dada por

$$Z(N, b, K) = \sum_{\{s_i\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)}. \tag{5}$$

El primer objetivo del problema es eliminar de la descripción a los espines impares, calculando la probabilidad marginal de los espines pares.

a) Sumando la probabilidad sobre los espines impares, muestre que la probabilidad de los espines pares tiene la misma forma que la probabilidad original,

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} P(\{s_i\}, b, K) = P(\{s_{2i}\}, \overline{b}, \overline{K}) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \overline{b}, \overline{K})}}{Z(\overline{N}, \overline{b}, \overline{K})}, \tag{6}$$

con $\overline{N} = \frac{1}{2}N$ y acoplamientos $\overline{b} = \overline{b}(b, K)$ y $\overline{K} = \overline{K}(b, K)$. Estas son las ecuaciones de transformación del grupo de renormalización. Resulta más cómodo expresar estas ecuaciones en términos de $\eta = e^{-2b}$ y $\tau = e^{-4K}$, de manera que escriba las ecuaciones de transformación para estos parámetros.

Si $N = 2^k$, con k tan grande como se quiera, la transformación puede iterarse indefinidamente, dando lugar a una secuencia de parámetros renormalizados, $\eta^{(n)}$ y $\tau^{(n)}$. Un punto fijo de la transformación es un par de valores (η^*, τ^*) tales que $\overline{\eta}(\eta^*, \tau^*) = \eta^*$ y $\overline{\tau}(\eta^*, \tau^*) = \tau^*$. Suponga que los parámetros iniciales difieren poco de los de un punto fijo, $\eta = \eta^* + \delta\eta$ y $\tau = \tau^* + \delta\tau$, y que la transformación se linealiza alrededor de este punto. Se dice que el punto fijo es linealmente estable con respecto a las perturbaciones en η si $\delta\eta^{(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$, e inestable si $|\delta\eta^{(n)}| \to \infty$. Análogamente, se define la estabilidad lineal respecto de τ.

b) Encuentre todos los puntos fijos en la región $[0, 1] \times [0, 1]$ y muestre que $(\eta^*, \tau^*) = (1, 0)$ es un punto fijo linealmente inestable respecto de los dos parámetros.

El valor medio de la magnetización por espín tiene que ser el mismo tanto si se lo calcula con la probabilidad detallada como si se lo calcula con la probabilidad del sistema decimado. Eso significa que

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \log Z(N,b,K)}{\partial b} = \frac{1}{\overline{N}}\frac{\partial \log Z(\overline{N},\overline{b},\overline{K})}{\partial \overline{b}}. \tag{7}$$

En los dos miembros de la ecuación aparece, en realidad, la misma función

$$m(N,b,K) = \frac{1}{N}\frac{\partial \log Z(N,b,K)}{\partial b}. \tag{8}$$

De forma que lo que en verdad se está afirmando es que

$$m(N,b,K) = m(\overline{N},\overline{b},\overline{K}). \tag{9}$$

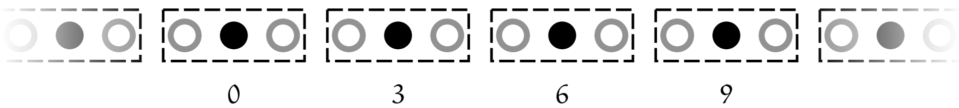
Asumiendo que el sistema es extensivo, en el límite en el que $N \to \infty$, la función $m(N,b,K)$ debe tender a una función independiente de N.

c) Use la transformación de grupo de renormalización para mostrar que, en el límite $N \to \infty$, cerca de $T = 0$ y $B = 0$, la función m satisface la siguiente ley de escala

$$m(b,\tau) \simeq \mathcal{M}\big(b\tau^{-\Delta}\big)\,. \tag{10}$$

Encuentre el exponente Δ y compare con la solución exacta en el mismo límite.

7) En el modelo de Ising en una dimensión, en lugar de sumar sobre los espines impares, se pueden definir otras formas de decimar el sistema. Por ejemplo, una posible forma de decimar es sumar sobre dos de cada tres espines, lo que equivale a formar celdas de Kadanoff de longitud 3.



Los espines cuyo índice es un múltiplo de 3 permanecen en la red, y los demás se suman. Muestre que para esta elección la transformación del grupo de renormalización también puede ser calculada en forma cerrada y encuentre los puntos fijos.

8) Considere el modelo de Potts en una dimensión, cuyo hamiltoniano es

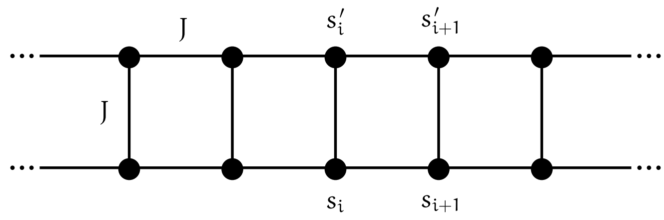
$$H(s_1, s_2, \ldots, s_N) = -J\sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i s_{i+1}}.$$

Cada s_i puede tomar $p \geqslant 2$ valores distintos.

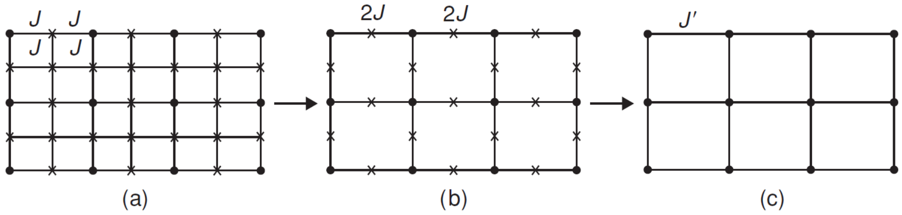
a) Obtenga las ecuaciones del grupo de renormalización correspondientes a decimar el sistema sumando sobre todos los sitios pares.

b) Encuentre los puntos fijos y estudie su estabilidad.

9) Considerar la doble cadena de Ising con interacciones a primeros vecinos. Decimar el sistema sumando sobre los escalones pares. Encontrar la transformación de grupo de renormalización y mostrar que aparecen interacciones más generales.



10) (Pathria 3ra. ed., problema 14.5). Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal–Kadanoff, que se muestra en la figura.



La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se elimina, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplamiento de los enlaces restantes se cambia de J a 2J. Eso lleva de la figura (a) a la figura (b). En segundo lugar, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplamiento J'.

a) Muestre que la relación de recurrencia para un modelo de Ising de espín 1/2 en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = \frac{2x^2}{1 + x^4},$$

donde $x = e^{-2K}$, con $K = \beta J$. Hay dos puntos fijos triviales, $x = 0$ y $x = 1$. Muestre que hay un punto fijo no trivial dado por

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \approx 0{,}5437.$$

Compare con el valor exacto de x_c.

b) Linealizando alrededor de este punto fijo, muestre que el autovalor λ de esta transformación es

$$\lambda = \frac{2(1 - x^*)}{x^*} \approx 1{,}6786,$$

y por lo tanto $\nu = \log 2/\log\lambda \approx 1{,}338$. Comparar con el valor exacto.