

## Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2023

### Segundo parcial – Resuelto

■ **Problema 1.** Considere un gas de Bose–Einstein ultrarrelativista, compuesto por  $N$  partículas de espín cero. El gas está contenido en un recipiente de volumen  $V$  y se mantiene a temperatura  $T$ . Se define  $\lambda^3 = (\beta\hbar c)^3/(8\pi)$ . En el límite termodinámico:

- Encuentre la temperatura crítica,  $T_c$ , por debajo de la cual hay condensado.
- Escriba la energía del gas,  $U(T)$ , por encima y por debajo de  $T_c$ . Por encima de  $T_c$ , le convendrá definir  $U(T)$  paramétricamente, dando, por ejemplo,  $T(z)$  y  $U(z)$ .
- Calcule  $c(T) = C_V(T)/(Nk)$ , por encima y por debajo de  $T_c$ . Muestre que la función  $c(T)$  es discontinua en  $T_c$ . Por encima de  $T_c$ , le convendrá definir  $c(T)$  paramétricamente, dando, por ejemplo,  $T(z)$  y  $c(z)$ .

■ **Solución.** La energía de las partículas es  $\epsilon(p) = pc$ . El número de partículas en los niveles excitados está dado por

$$N_e = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(p)} - 1} = \frac{4\pi V}{(\beta\hbar c)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{z^{-1}e^x - 1} = \frac{8\pi V}{(\beta\hbar c)^3} g_3(z). \quad (1)$$

Usando la definición de  $\lambda$ ,

$$N_e = \frac{V}{\lambda^3} g_3(z). \quad (2)$$

Debido a que el valor de  $N_e$  está acotado cuando  $z \rightarrow 1$ , existe una temperatura crítica  $T_c > 0$  por debajo de la cual se forma el condensado. Esa temperatura está determinada por la ecuación

$$N = \frac{V}{\lambda_c^3} g_3(1) = \frac{V}{\lambda_c^3} \zeta(3), \quad (3)$$

y es

$$kT_c = \frac{\hbar c}{2} \left[ \frac{1}{\pi\zeta(3)} \frac{N}{V} \right]^{1/3}. \quad (4)$$

La energía del gas es igual a la energía de las partículas en los niveles excitados,

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{pc}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(p)} - 1} = \frac{4\pi V}{(\beta\hbar c)^3} kT \int_0^\infty dx \frac{x^3}{z^{-1}e^x - 1} = 3 \frac{V}{\lambda^3} kT g_4(z). \quad (5)$$

Por encima de la temperatura crítica,

$$N = \frac{V}{\lambda^3} g_3(z). \quad (6)$$

Entonces,

$$U = 3NkT \frac{g_4(z)}{g_3(z)}. \quad (7)$$

Tanto la ecuación anterior como la Ec. (5) son respuestas válidas.

Para  $T > T_c$ , la definición paramétrica de  $U$  como función de la temperatura se consiguiendo simultáneamente  $T$  y  $U$  como funciones de  $z$ :

$$\begin{cases} kT = \frac{hc}{2} \left[ \frac{1}{\pi g_3(z)} \frac{N}{V} \right]^{1/3}, \\ U = 3NkT \frac{g_4(z)}{g_3(z)}. \end{cases} \quad (8)$$

Usando la Ec. (4), esto queda escrito de una manera más transparente:

$$\begin{cases} T = \left[ \frac{\zeta(3)}{g_3(z)} \right]^{1/3} T_c, \\ U = 3NkT \frac{g_4(z)}{g_3(z)}. \end{cases} \quad (9)$$

Sabemos que cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow 0$ . Teniendo en cuenta que para  $z \ll 1$  es  $g_v(z) \simeq z$ , recuperamos el resultado clásico para el gas ultrarrelativista,

$$U(T) \simeq 3NkT. \quad (10)$$

Por debajo de la temperatura crítica,  $z = 1$  y la Ec. (5) da

$$U = 3 \frac{V}{\lambda^3} kT g_4(1) = 3 \frac{V}{\lambda^3} kT \zeta(4). \quad (11)$$

El calor específico por partícula, por encima de la temperatura crítica, es

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{Nk} \frac{\partial U}{\partial T} = 3 \left\{ \frac{g_4(z)}{g_3(z)} + T \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N} \left[ \frac{g'_4(z)}{g_3(z)} - \frac{g_4(z)g'_3(z)}{g_3(z)^2} \right] \right\} \\ &= 3 \left\{ \frac{g_4(z)}{g_3(z)} + \frac{T}{z} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N} \left[ 1 - \frac{g_4(z)g_2(z)}{g_3(z)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Aquí hemos usado que  $g'_v(x) = g_{v-1}(x)/x$ . Para calcular la derivada de la fugacidad, hay que diferenciar la Ec. (6) manteniendo  $N$  y  $V$  constantes:

$$0 = \frac{3g_3(z)}{T} dT + g'_3(z) dz = \frac{3g_3(z)}{T} + \frac{g_2(z)}{z} dz. \quad (13)$$

Esto implica

$$\frac{T}{z} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N} = -\frac{3g_3(z)}{g_2(z)}. \quad (14)$$

Reemplazando en la Ec. (12),

$$c = 12 \frac{g_4(z)}{g_3(z)} - 9 \frac{g_3(z)}{g_2(z)}. \quad (15)$$

Paramétricamente,

$$\begin{cases} T = \left[ \frac{\zeta(3)}{g_3(z)} \right]^{1/3} T_c, \\ c = 12 \frac{g_4(z)}{g_3(z)} - 9 \frac{g_3(z)}{g_2(z)}. \end{cases} \quad (16)$$

Por debajo de la temperatura crítica,

$$U = 3 \frac{V}{\lambda^3} kT \zeta(4), \quad (17)$$

entonces

$$c = 12 \frac{V}{N\lambda^3} \zeta(4). \quad (18)$$

A partir de la Ec. (3), el cociente  $V/N$  puede escribirse en términos de la temperatura crítica, con lo que queda una ecuación más fácil de leer,

$$c = 12 \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}. \quad (19)$$

Si nos aproximamos a la temperatura crítica desde la derecha, la Ec. (16) implica

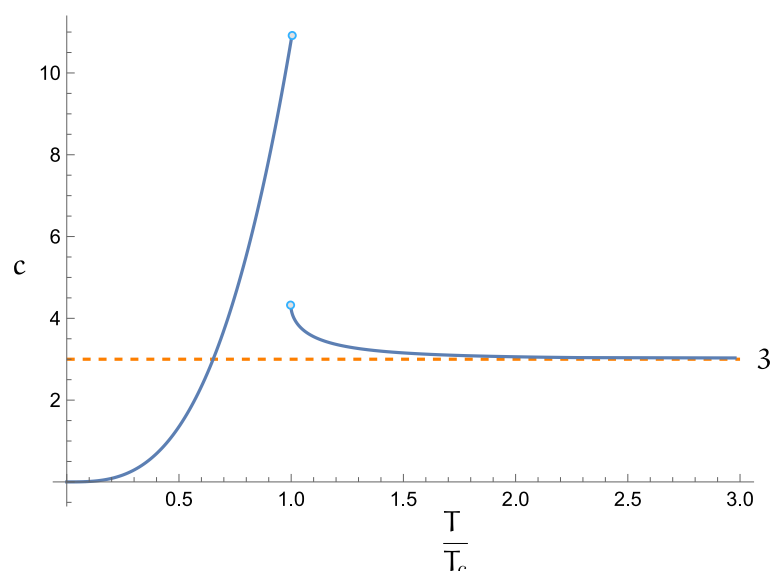
$$c^+ = \lim_{T \rightarrow T_c^+} c(T) = 12 \frac{g_4(1)}{g_3(1)} - 9 \frac{g_3(1)}{g_2(1)} = 12 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} - 9 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \approx 4,23. \quad (20)$$

Si nos aproximamos por la izquierda, la Ec. (19) da

$$c^- = \lim_{T \rightarrow T_c^-} c(T) = 12 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} \approx 10,8. \quad (21)$$

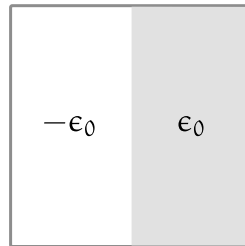
Al atravesar la temperatura crítica, el calor específico por partícula tiene un salto

$$\Delta c = c^- - c^+ = 9 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \approx 6,58. \quad (22)$$



■ **Problema 2.** Un gas bidimensional de  $N$  fermiones de espín  $s$  [y masa  $m$ ] está contenido en una caja cuadrada de área  $2A$ . Una mitad de la caja está a potencial  $-\epsilon_0$ , y la otra mitad, a potencial  $\epsilon_0$ , con  $\epsilon_0 > 0$ . Se define  $\epsilon = \hbar^2 N / (4\pi A m g)$ , donde  $g$  es la degeneración de espín.

- a) Calcule y grafique el potencial químico a temperatura cero como función de  $\epsilon$ .
- b) Calcule el potencial químico para  $T > 0$  como función de  $\epsilon$ .



■ **Solución.** Analicemos primero el caso  $T = 0$ . La primera partícula en llegar va a ocupar la región con potencial igual a  $-\epsilon_0$ . Eso fija el valor inicial del potencial químico en  $\mu = -\epsilon_0$ . Al aumentar el número de partículas, el potencial químico será cada vez mayor pero, durante cierto intervalo, la región con potencial  $\epsilon_0$  permanecerá vacía. Esta región recién empezará a poblarse cuando el potencial químico alcance el valor  $\epsilon_0$ . Supongamos entonces que sólo hay partículas en la región de la izquierda. El número de partículas está dado por

$$N = \frac{2\pi g A}{\hbar^2} \int_0^{p_{\max}} dp \quad p = \frac{2\pi g A}{\hbar^2} \frac{p_{\max}^2}{2}. \quad (23)$$

El valor máximo del impulso está determinado por la condición

$$\frac{p_{\max}^2}{2m} - \epsilon_0 = \mu. \quad (24)$$

Luego,

$$N = \frac{2\pi m g A}{\hbar^2} (\mu + \epsilon_0). \quad (25)$$

En términos de la variable  $\epsilon$ ,

$$2\epsilon = \mu + \epsilon_0. \quad (26)$$

Es decir,

$$\mu(\epsilon) = 2\epsilon - \epsilon_0. \quad (27)$$

Esta ecuación es válida mientras  $\mu \leq \epsilon_0$ , esto es, mientras  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Cuando  $\mu \geq \epsilon_0$ , las dos regiones están pobladas. La ecuación que determina el número de partículas en ese caso es

$$N = \frac{2\pi g A}{\hbar^2} \frac{p_{\max}^{(-)2}}{2} + \frac{2\pi g A}{\hbar^2} \frac{p_{\max}^{(+)}2}{2}, \quad (28)$$

donde  $p_{\max}^{(\pm)}$  es el impulso máximo en cada región,

$$\frac{p_{\max}^{(\pm)^2}}{2m} \pm \epsilon_0 = \mu. \quad (29)$$

Entonces,

$$N = \frac{2\pi m g A}{h^2} (\mu + \epsilon_0) + \frac{2\pi m g A}{h^2} (\mu - \epsilon_0) = \frac{4\pi m g A}{h^2} \mu. \quad (30)$$

En términos de  $\epsilon$ ,

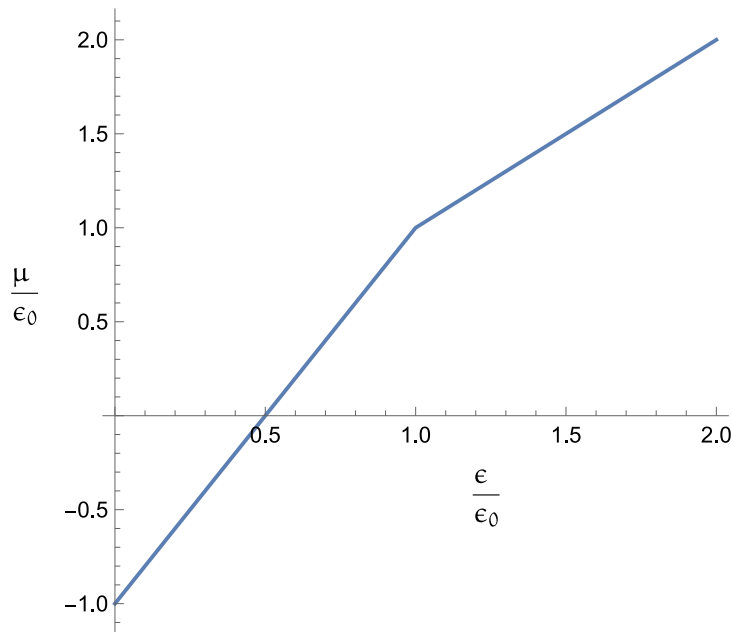
$$\epsilon = \mu. \quad (31)$$

Es decir,

$$\mu(\epsilon) = \epsilon. \quad (32)$$

En definitiva, el potencial químico como función de  $\epsilon$  es

$$\mu(\epsilon) = \begin{cases} 2\epsilon - \epsilon_0, & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_0; \\ \epsilon, & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_0. \end{cases} \quad (33)$$



Si  $\epsilon_0$  fuera igual a cero, el potencial químico tendría que coincidir con el del problema de un gas en una caja de área  $2A$  a potencial cero. Para ese problema, es fácil demostrar que

$$N = \frac{4\pi m g A}{h^2} \mu. \quad (34)$$

Vemos entonces que la variable  $\epsilon$  es el potencial químico a temperatura cero cuando  $\epsilon_0 = 0$ . En otras palabras,  $\epsilon$  es la energía de Fermi para el gas sin potencial en la caja de área  $2A$ . La

función (33) se reduce a la función esperada cuando  $\epsilon_0 = 0$ . Pero dice algo más. Aun en el caso en el que  $\epsilon_0 > 0$ , cuando  $\epsilon \geq \epsilon_0$ , el potencial químico está dado por la energía de Fermi del sistema en el que  $\epsilon_0 = 0$ . Esto sólo ocurre en dos dimensiones.

Es posible darle a la deducción de la Ec. (33) una apariencia más formal. Cada mitad de la caja puede considerarse un sistema en sí mismo. Debido a que los dos sistemas intercambian partículas, deben compartir el mismo valor del potencial químico. A temperatura cero, las funciones de distribución son escalones y el número total de partículas es

$$N = N_- + N_+ = \frac{2\pi gA}{h^2} \int_0^\infty dp p \Theta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \epsilon_0\right) + \frac{2\pi gA}{h^2} \int_0^\infty dp p \Theta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} - \epsilon_0\right). \quad (35)$$

Pero

$$\int_0^\infty dx f(x)\Theta(x_0 - x) = \Theta(x_0) \int_0^{x_0} dx f(x). \quad (36)$$

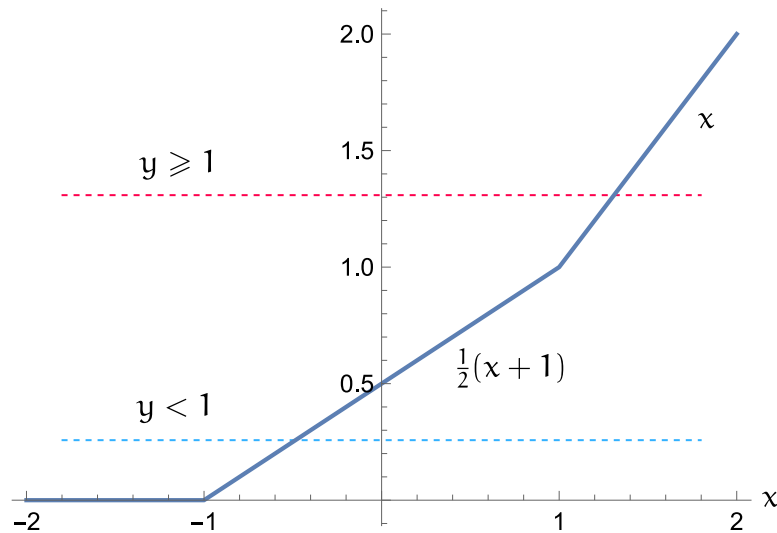
Entonces,

$$N = \frac{2\pi mgA}{h^2} \left[ \Theta(\mu + \epsilon_0)(\mu + \epsilon_0) + \Theta(\mu - \epsilon_0)(\mu - \epsilon_0) \right]. \quad (37)$$

En términos de la variable  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[ \Theta(\mu + \epsilon_0)(\mu + \epsilon_0) + \Theta(\mu - \epsilon_0)(\mu - \epsilon_0) \right]. \quad (38)$$

La figura muestra la representación gráfica de esta ecuación.



En esta figura,  $x = \mu/\epsilon_0$  e  $y = \epsilon/\epsilon_0$ . La línea quebrada es la función

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[ \Theta(x+1)(x+1) + \Theta(x-1)(x-1) \right]. \quad (39)$$

Las rectas de nivel horizontales representan el valor de  $y$ . En cada caso, la intersección de las dos gráficas determina la solución  $x(y)$ . Si  $0 \leq y \leq 1$ ,

$$x = 2y - 1. \quad (40)$$

Es decir, si  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ ,

$$\mu = 2\epsilon - \epsilon_0. \quad (41)$$

Análogamente, si  $\epsilon_0 \leq \epsilon$ ,  $\mu = \epsilon$ . Recuperamos la función  $\mu(\epsilon)$  definida en la Ec. (33).

Pasemos al caso  $T > 0$ . El número total de partículas es

$$N = N_- + N_+, \quad (42)$$

donde

$$N_{\pm} = \frac{2\pi g A}{h^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p}{1 + \exp\left[\beta \left(\frac{p^2}{2m} \pm \epsilon_0 - \mu\right)\right]}. \quad (43)$$

La integral puede evaluarse explícitamente:

$$\int_0^{\infty} dp \frac{p}{1 + \alpha e^{\beta p^2/2m}} = mkT \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-y}}{e^{-y} + \alpha} = mkT \int_0^1 dx \frac{1}{x + \alpha} = mkT \log(1 + \alpha^{-1}). \quad (44)$$

Luego,

$$N_{\pm} = \frac{2\pi mg A}{h^2} kT \log(1 + e^{\mu \mp \epsilon_0}). \quad (45)$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{2\pi mg A}{h^2} kT \log\left[(1 + e^{\beta(\mu + \epsilon_0)})(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_0)})\right]. \quad (46)$$

En términos de  $\epsilon$ ,

$$2\beta\epsilon = \log\left[(1 + e^{\beta(\mu + \epsilon_0)})(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_0)})\right] = \log\left[1 + e^{2\beta\mu} + 2 \cosh(\beta\epsilon_0) e^{\beta\mu}\right]. \quad (47)$$

Equivalentemente,

$$e^{2\beta\mu} + 2 \cosh(\beta\epsilon_0) e^{\beta\mu} + 1 - e^{2\beta\epsilon} = 0. \quad (48)$$

Esta es una ecuación cuadrática para  $e^{\beta\mu}$ . La solución con sentido físico es

$$e^{\beta\mu} = -\cosh(\beta\epsilon_0) + \sqrt{\cosh^2(\beta\epsilon_0) - 1 + e^{2\beta\epsilon}} = \sqrt{\sinh^2(\beta\epsilon_0) + e^{2\beta\epsilon}} - \cosh(\beta\epsilon_0). \quad (49)$$

Finalmente,

$$\mu(\epsilon) = kT \log\left[\sqrt{\sinh^2(\beta\epsilon_0) + e^{2\beta\epsilon}} - \cosh(\beta\epsilon_0)\right]. \quad (50)$$

Para recuperar el caso  $T \rightarrow 0$ , notemos que, en ese límite,

$$\sqrt{\sinh^2(\beta\epsilon_0) + e^{2\beta\epsilon}} - \cosh(\beta\epsilon_0) \simeq \sqrt{\frac{1}{4}e^{2\beta\epsilon_0} + e^{2\beta\epsilon}} - \frac{1}{2}e^{\beta\epsilon_0}. \quad (51)$$

Si  $\epsilon_0 > \epsilon$ , dentro de la raíz domina el primer término, y podemos escribir

$$\sqrt{\frac{1}{4}e^{2\beta\epsilon_0} + e^{2\beta\epsilon}} - \frac{1}{2}e^{\beta\epsilon_0} \simeq \frac{1}{2}e^{\beta\epsilon_0} [1 + 2e^{-2\beta(\epsilon_0-\epsilon)}] - \frac{1}{2}e^{\beta\epsilon_0} = e^{-\beta(\epsilon_0-2\epsilon)}. \quad (52)$$

Entonces,

$$\mu(\epsilon) \simeq kT \log[e^{-\beta(\epsilon_0-2\epsilon)}] = 2\epsilon - \epsilon_0. \quad (53)$$

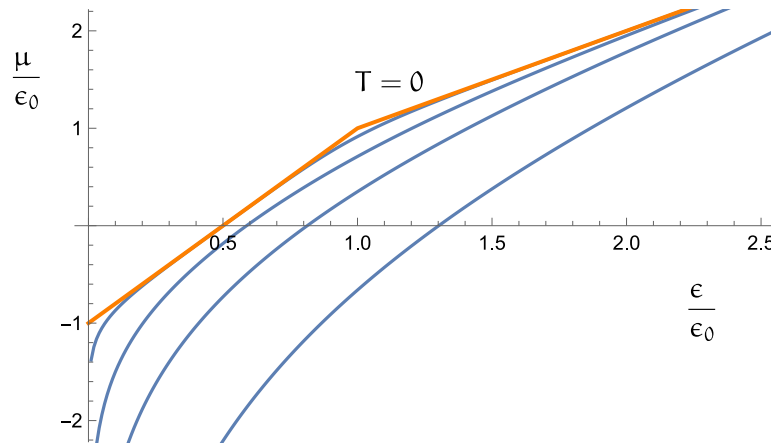
Si, en cambio,  $\epsilon > \epsilon_0$ , dentro de la raíz en la Ec. (51), domina el segundo término,

$$\sqrt{\frac{1}{4}e^{2\beta\epsilon_0} + e^{2\beta\epsilon}} - \frac{1}{2}e^{\beta\epsilon_0} \simeq e^{\beta\epsilon} [1 + \frac{1}{8}e^{-2\beta(\epsilon-\epsilon_0)} - \frac{1}{2}e^{-\beta(\epsilon-\epsilon_0)}] \simeq e^{\beta\epsilon}. \quad (54)$$

Entonces,

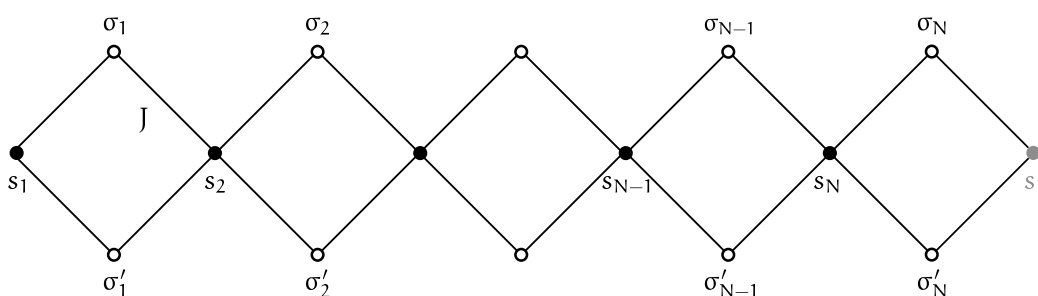
$$\mu(\epsilon) \simeq kT \log e^{\beta\epsilon} = \epsilon. \quad (55)$$

Obtenemos, así, los mismos resultados que en la primera parte del problema.



■ **Problema 3.** La figura muestra una cadena de Ising cerrada. La constante de interacción entre espines es  $J$  y hay un campo externo  $B$ . Se definen  $K = \beta J$ ,  $b = \beta \mu B$ ,  $\chi = e^K$  e  $y = e^b$ .

- Sumando la probabilidad canónica sobre los espines  $\{\sigma_i\}$  y  $\{\sigma'_i\}$ , encuentre los valores efectivos de los parámetros  $\chi$  e  $y$  para los espines  $\{s_i\}$ .
- Calcule la energía libre de Helmholtz por eslabón en el límite  $N \rightarrow \infty$ .
- En ese mismo límite, calcule el valor medio de los espines  $\{s_i\}$ . No es necesario que intente simplificar las expresiones. Puede dejar expresado el resultado en términos de la composición de ciertas funciones.
- En ese mismo límite, calcule el valor medio de los espines  $\{\sigma_i\}$ . No deben aparecer sumatorias, pero puede dejar derivadas sin evaluar.





■ **Solución.** El factor de Boltzmann es

$$e^{-\beta E(\{s_i\}, \{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\})} = \prod_{i=1}^N \chi^{(\sigma_i + \sigma'_i)(s_i + s_{i+1})} y^{s_i} y^{\sigma_i + \sigma'_i}. \quad (56)$$

Es fácil ver que cada interacción aparece en esta expresión una sola vez. Sumando explícitamente sobre las configuraciones de los espines  $\{\sigma_i\}$  y  $\{\sigma'_i\}$ , queda

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\}} e^{-\beta E(\{s_i\}, \{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\})} &= \prod_{i=1}^N \left[ \chi^{2(s_i + s'_{i+1})} y^2 + 2 + \chi^{-2(s_i + s'_{i+1})} y^{-2} \right] y^{s_i} \\ &= \prod_{i=1}^N \left[ \chi^{(s_i + s'_{i+1})} y + \chi^{-(s_i + s'_{i+1})} y^{-1} \right]^2 y^{s_i}. \end{aligned} \quad (57)$$

Conviene escribir el último término de manera simétrica. Debido a que la cadena es cerrada,

$$\prod_{i=1}^N y^{s_i} = \prod_{i=1}^N y^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}. \quad (58)$$

Entonces,

$$\sum_{\{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\}} e^{-\beta E(\{s_i\}, \{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\})} = \prod_{i=1}^N \left[ \chi^{(s_i + s'_{i+1})} y + \chi^{-(s_i + s'_{i+1})} y^{-1} \right]^2 y^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}. \quad (59)$$

El objetivo es mostrar que esto es equivalente al factor de Boltzmann para una cadena cerrada formada por los espines  $\{s_i\}$ , con acoplamientos efectivos  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ . Es decir, mostrar que existen  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  y una constante  $c$  tales que

$$\prod_{i=1}^N \left[ \chi^{(s_i + s'_{i+1})} y + \chi^{-(s_i + s'_{i+1})} y^{-1} \right]^2 y^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})} = \prod_{i=1}^N c \bar{x}^{s_i s_{i+1}} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}. \quad (60)$$

Lo más sencillo es igualar término a término,

$$\left[ \chi^{(s_i + s'_{i+1})} y + \chi^{-(s_i + s'_{i+1})} y^{-1} \right]^2 y^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})} = c \bar{x}^{s_i s_{i+1}} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}. \quad (61)$$

Esto tiene que ser cierto para los cuatro estados posibles de los espines  $s_i$  y  $s_{i+1}$ . Se obtienen así tres ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} (x^2 y + x^{-2} y^{-1})^2 y &= c \bar{x} \bar{y}, \\ (y + y^{-1})^2 &= c \bar{x}^{-1}, \\ (x^{-2} y + x^2 y^{-1})^2 y^{-1} &= c \bar{x} \bar{y}^{-1}. \end{aligned} \quad (62)$$

Es el mismo tipo de sistema que ya hemos resuelto muchas veces. Las soluciones son

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sqrt{(x^2y + x^{-2}y^{-1})(x^{-2}y + x^2y^{-1})}}{y + y^{-1}}, \\ \bar{y} &= \frac{(x^2y + x^{-2}y^{-1})}{(x^{-2}y + x^2y^{-1})} y, \\ c &= \sqrt{(x^2y + x^{-2}y^{-1})(x^{-2}y + x^2y^{-1})} (y + y^{-1}).\end{aligned}\tag{63}$$

En resumen,

$$\sum_{\{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\}} e^{-\beta E(\{\sigma_i\}, \{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\})} = c^N \prod_{i=1}^N \bar{x}^{s_i s_{i+1}} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}.\tag{64}$$

Por lo tanto, la función de partición canónica del sistema original es

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \sum_{\{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\}} e^{-\beta E(\{\sigma_i\}, \{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\})} = c^N \sum_{\{s_i\}} \prod_{i=1}^N \bar{x}^{s_i s_{i+1}} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})}.\tag{65}$$

Definamos la matriz de transferencia  $\bar{q}$  con elementos

$$\bar{q}_{s_i s_j} = \bar{x}^{s_i s_j} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_j)}.\tag{66}$$

Explícitamente,

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{x}\bar{y} & \bar{x}^{-1} \\ \bar{x}^{-1} & \bar{x}\bar{y}^{-1} \end{pmatrix}.\tag{67}$$

Aquí estamos asociando el valor 1 del espín a la primera fila o columna, y el valor  $-1$  a la segunda fila o columna. La última sumatoria en la Ec. (65) es igual a la traza de la potencia  $N$ -ésima de la matriz de transferencia,

$$\sum_{\{s_i\}} \prod_{i=1}^N \bar{x}^{s_i s_{i+1}} \bar{y}^{\frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})} = \sum_{\{s_i\}} \bar{q}_{s_1 s_2} \bar{q}_{s_2 s_3} \dots \bar{q}_{s_N s_1} = \text{Tr } \bar{q}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N,\tag{68}$$

donde  $\lambda_+ > \lambda_-$  son los autovalores de la matriz  $\bar{q}$ . Luego,

$$Z = c^N (\lambda_+^N + \lambda_-^N).\tag{69}$$

La energía libre de Helmholtz por eslabón está dada por

$$-\frac{\beta F}{N} = \frac{1}{N} \log Z = \log c + \frac{1}{N} \log(\lambda_+^N + \lambda_-^N).\tag{70}$$

En el límite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\frac{\beta F}{N} \right) = \log c + \log \lambda_+.\tag{71}$$

La solución se completa diciendo que  $\lambda_+$  es

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}\bar{x} \left[ \bar{y} + \bar{y}^{-1} + \sqrt{(\bar{y} - \bar{y}^{-1})^2 + 4\bar{x}^{-4}} \right]. \quad (72)$$

Para calcular el valor medio de los espines de tipo  $s$ , podemos usar el resultado de la cadena lineal usual, teniendo en cuenta que la distribución de probabilidad de los espines de tipo  $s$  está gobernada por los parámetros efectivos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . El resultado para la cadena lineal es

$$\langle s \rangle = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + x^{-4}}} = \frac{y - y^{-1}}{\sqrt{(y - y^{-1})^2 + 4x^{-4}}}. \quad (73)$$

Todo lo que tenemos que hacer es evaluar esta expresión reemplazando  $x$  por  $\bar{x}$  e  $y$  por  $\bar{y}$ . No era la idea del problema hacer estos reemplazos explícitamente. Además no hay ninguna simplificación providencial, de manera que la expresión final no es particularmente iluminadora. Era suficiente escribir

$$\langle s \rangle = \frac{\bar{y} - \bar{y}^{-1}}{\sqrt{(\bar{y} - \bar{y}^{-1})^2 + 4\bar{x}^{-4}}}. \quad (74)$$

Para calcular el valor medio de los espines de tipo  $\sigma$ , podemos primero calcular la magnetización total, restarle la magnetización debida a los espines  $s$  y dividir el resultado por  $2N$ . El valor medio de la suma de todos los espines es

$$\left\langle \sum_{i=1}^N (s_i + \sigma_i + \sigma'_i) \right\rangle_N = N \langle s \rangle_N + 2N \langle \sigma \rangle_N = \frac{\partial \log Z}{\partial b} = y \frac{\partial \log Z}{\partial y}. \quad (75)$$

El subíndice  $N$  significa que aún no hemos tomado el límite  $N \rightarrow \infty$ . Despejando,

$$\langle \sigma \rangle_N = \frac{1}{2N} \left( y \frac{\partial \log Z}{\partial y} - N \langle s \rangle_N \right). \quad (76)$$

Usando la expresión (69),

$$\langle \sigma \rangle_N = \frac{1}{2N} \left[ Ny \frac{\partial \log c}{\partial y} + y \frac{\partial \log(\lambda_+^N + \lambda_-^N)}{\partial y} - N \langle s \rangle_N \right]. \quad (77)$$

En el límite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\langle \sigma \rangle_N \rightarrow \langle \sigma \rangle = \frac{1}{2} \left[ y \frac{\partial \log c}{\partial y} + y \frac{\partial \log \lambda_+}{\partial y} - \langle s \rangle \right]. \quad (78)$$

No se pretendía que escribieran el resultado de  $\langle \sigma \rangle$  por extenso.