Segundo parcial de Física Teórica 3
7/7/2021

Problema 1

Considere un gas de electrones confinado a moverse en una superficie bidimensional de área A, en presencia de un campo magnético B. Las energías monoparticulares son

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \mp \mu_m B,$$

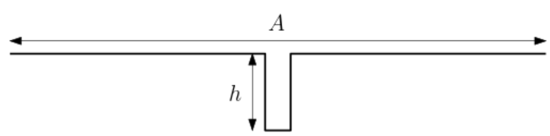
donde m es la masa del electrón, μ_m el módulo de su momento magnético y el signo $-/+$ corresponde a que el spin del electrón se oriente paralelo/antiparalelo al campo. El gas se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule, en función de la fugacidad z, el número de electrones $N_{-/+}$ con spin paralelo/antiparalelo al campo, y de ahí obtenga la magnetización $M = \mu_m(N_- - N_+)$ también en función de z.

(b) Calcule la susceptibilidad $\chi = \partial M/\partial B|_{B=0}$ en función del número total N de partículas. Manteniendo N constante, estudie el comportamiento de χ a temperaturas altas y bajas y grafíquela cualitativamente en función de T. *Ayuda:* recuerde que la ecuación $z f'_\nu(z) = f_{\nu-1}(z)$ sólo vale para $\nu > 1$.

Problema 2

Considere un gas bidimensional de partículas de masa m y spin 0 que se mueven sobre una mesa de área A. La mesa tiene un agujero de área despreciable y profundidad h por el que las partículas pueden caer, ver figura.



Para especificar un estado monoparticular, entonces, hay que decir primero si la partícula está sobre la mesa o en el agujero. Si está sobre la mesa, sus estados se caracterizan como de costumbre por posición y momento y tienen energía $\epsilon = p^2/2m$; si está en el agujero, entonces sólo puede encontrarse en un único estado con energía $\epsilon = -gh$, donde g es la aceleración de la gravedad. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T, que vamos a mantener constante. Se pide trabajar en el límite termodinámico.

(a) ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la fugacidad z? Calcule el número N de partículas en función de z.

(b) Calcule el valor crítico n_c de la densidad $n = N/A$ por arriba del cual la fracción de partículas en el agujero es no nula. Calcule esta fracción en función de n, y grafíquela cualitativamente.

(c) Calcule la fugacidad en función de n, y a partir de ahí obtenga la presión en función de n, teniendo en cuenta que las partículas en el agujero no hacen presión. Grafique esta última función cualitativamente.

Problema 3

Considere una cadena cerrada de N spines, cada uno de los cuales puede estar en cuatro estados, $n = 0, 1, 2, 3$, con hamiltoniano

$$H(n_1, \ldots, n_N) = -J \sum_{i=1}^{N} \cos\left[\frac{\pi}{2}(n_i - n_{i+1})\right],$$

donde $J > 0$ y $n_{N+1} = n_1$. Este modelo se llama el *modelo del reloj*, porque cada spin se puede visualizar como la aguja de un reloj; los cuatro estados posibles son los cuatro cuartos, y la energía de interacción entre primeros vecinos es proporcional al producto escalar entre las direcciones de las agujas.

(a) ¿Cuál es la mínima energía que puede tener el sistema? ¿Cuáles son los estados con esa energía?

(b) Calcule la función de partición canónica por el método de la matriz de transferencia.
Ayuda: va a tener que diagonalizar una matriz 4×4, cosa que puede hacer en WolframAlpha; por ejemplo, para diagonalizar la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

hay que escribir "eigenvalues{{a,b},{c,d}}".

(c) Calcule la energía del sistema en función de la temperatura, y verifique su resultado comparando con el del ítem (a).