**Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023**

**Primer recuperatorio – Resuelto**

■ **Problema 1**. Un sistema está compuesto por partículas que se aniquilan de a pares. La probabilidad [por unidad de tiempo] de que se aniquile un par de partículas es igual a $2\lambda$ por el número de pares de partículas. Inicialmente en $t = 0$ hay cuatro partículas. Para esa condición inicial, se define $p_n(t)$ como la probabilidad de que haya $n$ partículas a tiempo $t \geqslant 0$.

a) Encuentre y grafique $p_n(t)$ como función de $t$ para todo $n$ entero y $t \geqslant 0$.

b) ¿Cuándo es máxima la probabilidad de que en el sistema haya dos partículas?

c) ¿Cuál es el tiempo medio hasta la aniquilación de todas las partículas?

■ **Solución**. Si hay $n$ partículas, el número de pares es

$$N(n) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

La ecuación maestra es

$$\dot{p}_n = 2\lambda\Big[N(n+2)\,p_{n+2} - N(n)\,p_n\Big] = \lambda\Big[(n+2)(n+1)p_{n+2} - n(n-1)p_n\Big]. \tag{2}$$

Conviene adimensionalizar el tiempo redefiniendo $t \to \lambda t$. Si inicialmente hay cuatro partículas, las únicas ecuaciones relevantes son

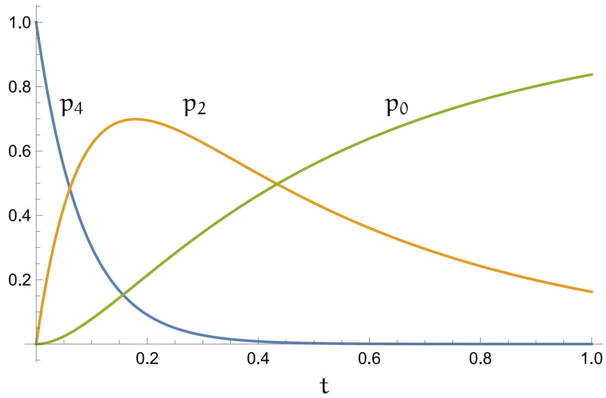
$$\dot{p}_4 = -12p_4, \qquad \dot{p}_2 = 12p_4 - 2p_2, \qquad \dot{p}_0 = 2p_2. \tag{3}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} p_4(t) &= e^{-12t}, \\ p_2(t) &= \tfrac{6}{5}\left(e^{-2t} - e^{-12t}\right), \\ p_0(t) &= 1 - p_4(t) - p_2(t) = 1 - \tfrac{6}{5}e^{-2t} + \tfrac{1}{5}e^{-12t}. \end{aligned} \tag{4}$$

La probabilidad de que haya dos partículas es máxima cuando $\dot{p}_2 = 0$, lo que ocurre en

$$t = \frac{\log 6}{10} \approx 0{,}18. \tag{5}$$



Para decaer al estado con cero partículas, el sistema tiene que decaer primero al estado con dos partículas y luego al estado con cero partículas. La probabilidad de que el sistema decaiga al estado con dos partículas durante el intervalo entre $t$ y $t + dt$ es

$$dp_{4\to 2} = 12p(4, t|4, 0)dt. \tag{6}$$

La probabilidad de que habiendo inicialmente dos partículas éstas se aniquilen en el intervalo entre $t$ y $t + dt$ es

$$dp_{2\to 0} = 2p(2, t|2, 0)dt. \tag{7}$$

En general,

$$p(n, t|n, 0) = e^{-n(n-1)t}. \tag{8}$$

El tiempo medio de vida del estado con cuatro partículas será

$$T(4) = \int_0^\infty 12te^{-12t}dt = -\frac{1}{12}(1 + x)e^{-x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{12}. \tag{9}$$

Análogamente,

$$T(2) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

El tiempo medio hasta la aniquilación de las cuatro partículas iniciales es

$$\tau = T(4) + T(2) = \frac{7}{12}. \tag{11}$$

■ **Problema 2**. Un gas está compuesto por $N$ partículas de masa $m$. El gas está en un recipiente de volumen $V$ y se mantiene a temperatura $T$. Las partículas tienen un grado de libertad interno caracterizado por un número entero $n$. La energía de las partículas es

$$\epsilon_n(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

a) Escriba la función de partición en el ensamble canónico.

b) Calcule $U/N$.

c) Calcule $C_V/(Nk)$ y grafíquelo cualitativamente en función de la temperatura. ¿Cuál es la escala de energía relevante?

■ **Solución**. La función de partición se factoriza como

$$Z_N = \frac{1}{N!}Z_1^N, \tag{13}$$

donde

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V}{h^3} \int d^3p \ \exp\!\left[-\beta \frac{p^2}{2m} - \beta\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right] \\
&= \left\{ \frac{V}{h^3} \int d^3p \ \exp\!\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\!\left[-\beta\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

El primer factor es la función de partición usual,

$$
\frac{V}{h^3} \int d^3p \ \exp\!\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{V}{\lambda^3}. \tag{15}
$$

En cuanto al segundo factor,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \exp\!\left[-\beta\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right] = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh\!\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}. \tag{16}
$$

Finalmente,

$$
Z_N = \frac{1}{N!}\left[\frac{1}{2\sinh\!\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)} \frac{V}{\lambda^3}\right]^N . \tag{17}
$$

La energía media por partícula es

$$
\frac{U}{N} = -\frac{1}{N}\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta} = \tfrac{3}{2}kT + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \coth\!\left(\tfrac{1}{2}\beta\hbar\omega\right). \tag{18}
$$

Podemos separar la energía del estado fundamental escribiendo

$$
\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}. \tag{19}
$$

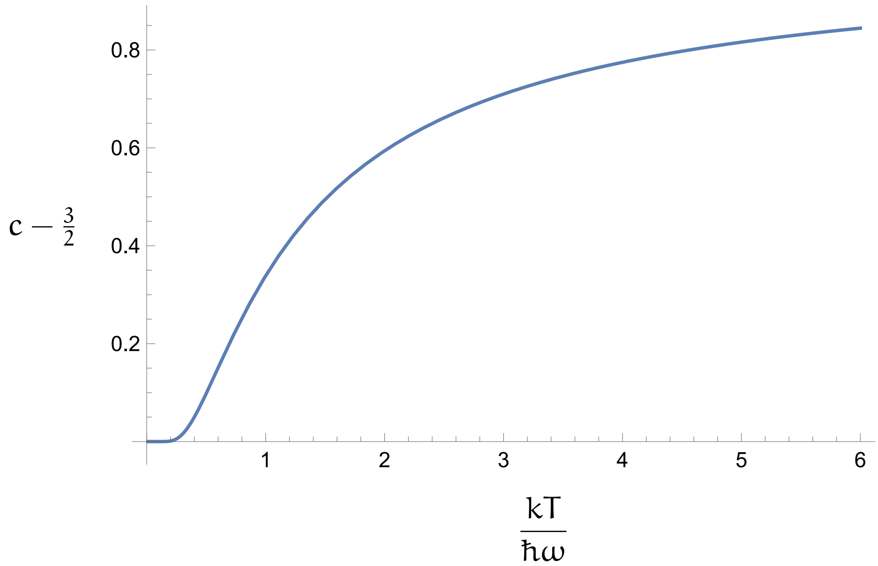
Entonces resulta

$$
\frac{U}{N} = \tfrac{3}{2}kT + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega. \tag{20}
$$

El calor específico por partícula a volumen constante es

$$
c = \frac{1}{Nk}\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} + \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{1}{\left(e^{\beta\hbar\omega}-1\right)^2}. \tag{21}
$$

Para $kT \ll \hbar\omega$, $c \simeq \frac{3}{2}$. Para $kT \gg \hbar\omega$, $c \simeq \frac{5}{2}$, en acuerdo con el teorema de equipartición. Dejando de lado el término constante, la función $c(T)$ es como muestra la figura. La escala de energía está determinada por $\hbar\omega$.




■ **Problema 3**. Un recipiente de volumen $V$ está dividido en $N$ celdas. Las celdas pueden ser ocupadas por partículas. Una celda desocupada o una ocupada por una sola partícula tienen energía cero. Una celda ocupada por dos partículas tiene energía $\epsilon > 0$, y ninguna celda puede estar ocupada por más de dos partículas. Se define $y = e^{-\beta\epsilon}$. En el ensamble gran canónico, encuentre la energía media por celda, la concentración de partículas $c$ (número de partículas dividido por $N$) y la presión $P$ en términos de la temperatura y de la fugacidad. En términos de $T$ y $c$, encuentre expresiones aproximadas para la energía media por celda y para la presión en los límites en los que $c$ es muy pequeña o muy cercana a su valor máximo.

■ **Solución**. Aquí.