Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023

Segundo recuperatorio – Resuelto

■ **Problema 1**. Un gas ultrarrelativista está compuesto por N bosones de espín cero en una caja bidimensional de área A. La temperatura del gas es T. Se define $\lambda^2 = (\beta hc)^2/(2\pi)$. En el límite termodinámico:

a) Encuentre T_c, la temperatura crítica por debajo de la cual hay condensado.

b) Escriba la energía por partícula, $u(T) = U(T)/N$, por encima y por debajo de T_c. Por encima de T_c, defina $u(T)$ paramétricamente, dando $T(z)$ y $u(z)$.

c) Calcule $c(T) = C_A(T)/(Nk)$, por encima y por debajo de T_c. Muestre que la función $c(T)$ es continua en T_c. Por encima de T_c, defina $c(T)$ paramétricamente, dando $T(z)$ y $c(z)$.

■ **Solución**. El número de partículas en los niveles excitados es

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{A}{h^2}\int d^2p\, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(\mathbf{p})}-1} = \frac{2\pi A}{h^2}\int_0^\infty dp\, \frac{p}{z^{-1}e^{\beta pc}-1} = \frac{2\pi A}{(\beta hc)^2}\, g_2(z) \\ &= \frac{A}{\lambda^2}\, g_2(z). \end{aligned} \tag{1}$$

La condición que define la temperatura crítica es

$$N = \frac{A}{\lambda_c^2}\, g_2(1) = \frac{A}{\lambda_c^2}\, \zeta(2). \tag{2}$$

De aquí resulta

$$kT_c = hc\left[\frac{1}{\zeta(2)}\frac{N}{2\pi A}\right]^{1/2}. \tag{3}$$

La energía del gas es igual a la energía de las partículas en los niveles excitados,

$$U = \frac{A}{h^2}\int d^2p\, \frac{\epsilon(\mathbf{p})}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(\mathbf{p})}-1} = \frac{2\pi A}{h^2}\int_0^\infty dp\, p\, \frac{pc}{z^{-1}e^{\beta pc}-1} = \frac{2A}{\lambda^2}\, kT\, g_3(z). \tag{4}$$

Por encima de la temperatura crítica, vale la relación

$$N = \frac{A}{\lambda^2}\, g_2(z), \tag{5}$$

por lo tanto,

$$u = \frac{U}{N} = 2kT\,\frac{g_3(z)}{g_2(z)}. \tag{6}$$

Comparando las Ecs. (2) y (5), resulta

$$T = \left[\frac{\zeta(2)}{g_2(z)}\right]^{1/2} T_c. \tag{7}$$

Entonces, por encima de la temperatura crítica, la energía por partícula en función de T queda definida paramétricamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} T = \left[\dfrac{\zeta(2)}{g_2(z)}\right]^{1/2} T_c, \\[2ex] u = 2kT\,\dfrac{g_3(z)}{g_2(z)}. \end{cases} \tag{8}$$

Por debajo de la temperatura crítica,

$$U = \frac{2A}{\lambda^2}\,kT\zeta(3). \tag{9}$$

Usando la Ec. (2) para escribir A/N, queda

$$u = 2\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}\,kT. \tag{10}$$

El calor específico por partícula a área constante por encima de la temperatura crítica es

$$c = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_A = 2\left\{\frac{g_3(z)}{g_2(z)} + \frac{Tz'}{z}\left[1 - \frac{g_3(z)g_1(z)}{g_2(z)^2}\right]\right\}. \tag{11}$$

Aquí hemos usado que $g'_\nu(z) = g_{\nu-1}(z)/z$. Para calcular z', hay que diferenciar la ecuación

$$N = \frac{A}{\lambda^2}\,g_2(z), \tag{12}$$

manteniendo N y A constantes. Explícitamente,

$$0 = \frac{2dT}{T} + \frac{g_1(z)}{g_2(z)}\frac{dz}{z}. \tag{13}$$

Esto implica

$$\frac{Tz'}{z} = -2\,\frac{g_2(z)}{g_1(z)}. \tag{14}$$

Reemplazando en la Ec. (11),

$$c = 6\,\frac{g_3(z)}{g_2(z)} - 4\,\frac{g_2(z)}{g_1(z)}. \tag{15}$$

Por debajo de la temperatura crítica, la Ec. (10) da

$$c = 6\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}. \tag{16}$$

Puesto que $g_1(z)$ diverge cuando $z \to 1$, a partir de la Ec. (15) obtenemos

$$\lim_{T\to T_c^+} c(T) = \frac{6\zeta(3)}{\zeta(2)}. \tag{17}$$

Por otro lado, tomando el límite de la Ec. (16),

$$\lim_{T \to T_c^-} c(T) = \frac{6\zeta(3)}{\zeta(2)}. \tag{18}$$

Esto significa que la función $c(T)$ es continua en T_c. Aunque el problema no lo pida, veamos qué sucede con su derivada. Por encima de la temperatura crítica,

$$c'(T) = \frac{z'}{z}\left[6 - \frac{6g_3(z)g_1(z)}{g_2(z)^2} - 4 + \frac{4g_2(z)g_0(z)}{g_1(z)^2}\right] = -\frac{2}{T}\left[\frac{2g_2(z)}{g_1(z)} - \frac{6g_3(z)}{g_2(z)} + 4\frac{g_2(z)^2 g_0(z)}{g_1(z)^3}\right]. \tag{19}$$

En el límite en el que la temperatura tiende a T_c^+, el primer término tiende a cero, el segundo tiende a una constante finita, y para saber qué pasa con el tercero hay que escribir explícitamente las funciones $g_0(z)$ y $g_1(z)$. Por definición,

$$g_1(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l} = -\log(1-z), \qquad g_0(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l = \frac{z}{1-z}. \tag{20}$$

Vemos entonces que

$$\lim_{T \to T^+} c'(T) = -\infty. \tag{21}$$

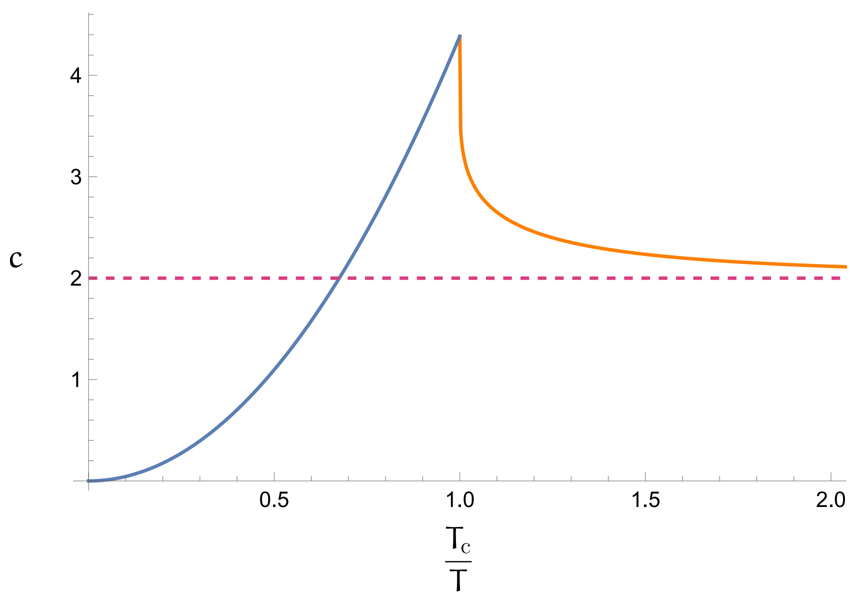
Por debajo de la temperatura crítica,

$$c'(T) = \frac{12}{T}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}. \tag{22}$$

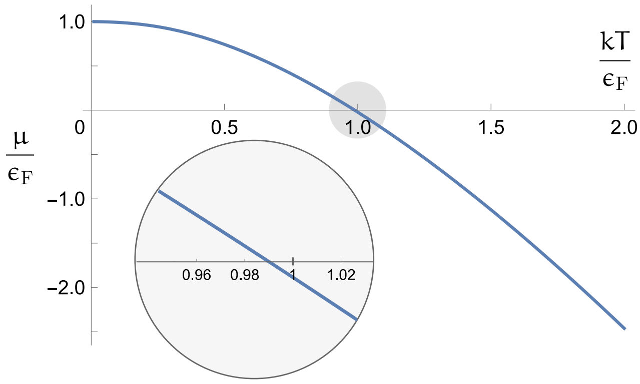
Luego,

$$\lim_{T \to T_c^-} c'(T) = \frac{12}{T_c}\frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}. \tag{23}$$

Para completar la descripción cualitativa de la función $c(T)$, a partir de la Ec. (15) y del hecho de que z tienda a cero cuando $T \to \infty$, vemos que para $T \gg T_c$, $c(T) \simeq 2$. Reuniendo todos estos resultados, podemos esperar algo como lo que muestra la figura.



■ **Problema 2**. Un gas de N fermiones de espín s y masa m está contenido en un recipiente de volumen V. La figura muestra el potencial químico en función de la temperatura.



a) En términos de la energía de Fermi, ¿para qué valor de kT es μ igual a cero? La respuesta debe ser de la forma $kT_0 = \alpha\epsilon_F$, donde α es una constante universal. No se pide un valor numérico, pero, si tiene calculadora, le será útil saber que $f_{3/2}(1) \approx 0{,}7651$.

b) A partir de la primera corrección de temperatura finita para el potencial químico, estime el valor de kT para el cual μ es igual a cero.

■ **Solución**. La ecuación que relaciona la fugacidad con el número de partículas es

$$N = \frac{gV}{\lambda^3} f_{3/2}(z), \tag{24}$$

donde $g = 2s + 1$. Cuando el potencial químico es cero, $z = 1$. Entonces, debe ser

$$kT_0 = \left[\frac{1}{f_{3/2}(1)} \frac{h^3}{(2\pi m)^{3/2}} \frac{N}{gV}\right]^{2/3}. \tag{25}$$

Por otro lado, la energía de Fermi está dada por

$$\frac{N}{gV} = \frac{4\pi}{3h^3}(2m\epsilon_F)^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\, \epsilon_F^{3/2}, \tag{26}$$

de modo que

$$kT_0 = \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}\, f_{3/2}(1)}\right]^{2/3} \epsilon_F \approx 0{,}9887\epsilon_F. \tag{27}$$

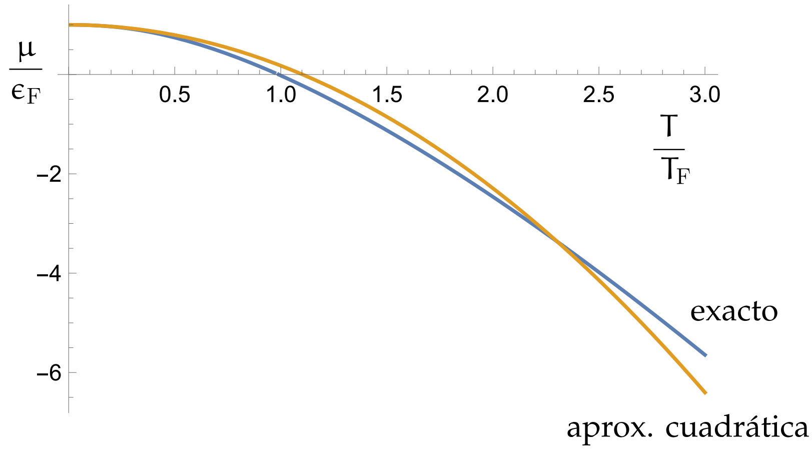
Para la segunda parte del problema, usando el lema de Sommerfeld, se encuentra que

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right]. \tag{28}$$

En principio, el rango de validez de esta aproximación es $kT \ll \epsilon_F$. El resultado anterior, y la propia figura del enunciado, muestran que la temperatura buscada es del orden de T_F. No hay garantías de que la ecuación anterior conduzca a una estimación válida para la temperatura a la cual se anula el potencial químico. Explícitamente,

$$kT_0 \approx \frac{\sqrt{12}}{\pi}\, \epsilon_F \approx 1{,}103\epsilon_F. \tag{29}$$

Este resultado es un 10% mayor al obtenido con la expresión exacta. No está mal para ser una estimación. Ocurre que la aproximación (28) es cualitativamente aceptable incluso para valores de T comparables con T_F. La figura muestra el gráfico de μ en función de la temperatura junto con la aproximación (28). Claramente, para $T \ll T_F$, la aproximación es excelente pero, incluso para valores de T tan altos como $2T_F$ la aproximación es cualitativamente buena.

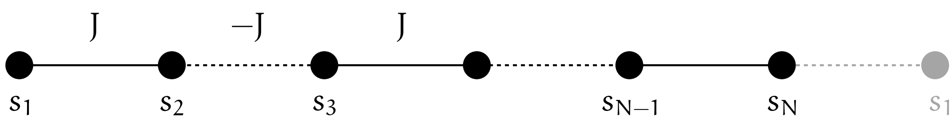


Uno de los objetivos de este problema era llamar la atención sobre el error al que puede inducir el gráfico de $\mu(T)$. Si no hubiéramos graficado el *inset* con el detalle de la región cercana a T_F, probablemente hubiéramos inferido que $T_0 = T_F$.

■ **Problema 3**. La figura muestra una cadena de Ising cerrada de N espines, con N par. La constante de acoplamiento entre espines alterna su valor entre J y $-J$. Hay un campo externo B. Se definen $x = e^{\beta J}$ e $y = e^{\beta\mu B} = e^{b}$.

a) Calcule la energía libre por espín en el límite $N \to \infty$.

b) En el mismo límite, calcule el valor medio de la magnetización por espín.



■ **Solución**. La función de partición es

$$Z = \sum_{\{s_i\}} x^{s_1 s_2} y^{\frac{1}{2}(s_1+s_2)} x^{-s_2 s_3} y^{\frac{1}{2}(s_2+s_3)} \ldots\ x^{s_{N-1} s_N} y^{\frac{1}{2}(s_{N-1}+s_N)} x^{-s_N s_1} y^{\frac{1}{2}(s_N+s_1)}. \tag{30}$$

Esto no deja de ser la traza de un producto de matrices,

$$Z = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{q}\,\mathbf{q}')^{N/2} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{Q}^{N/2}, \tag{31}$$

donde

$$q_{s_i s_j} = x^{s_i s_j} y^{\frac{1}{2}(s_i+s_j)}, \qquad q'_{s_i s_j} = x^{-s_i s_j} y^{\frac{1}{2}(s_i+s_j)}. \tag{32}$$

El producto de estas dos matrices es

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} xy & x^{-1} \\ x^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1}y & x \\ x & x^{-1}y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & x^2y + x^{-2}y^{-1} \\ x^{-2}y + x^2y^{-1} & 1+y^{-2} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Aunque $\mathbf{Q}$ no es simétrica, no necesitamos simetrizarla. El resultado

$$\operatorname{Tr} \mathbf{M}^k = \sum_i \lambda_i^k, \tag{34}$$

donde λ_i son los autovalores de $\mathbf{M}$, vale en general. Entonces,

$$Z = \lambda_+^{N/2} + \lambda_-^{N/2}, \tag{35}$$

donde $\lambda_\pm$ son los autovalores de $\mathbf{Q}$. La ecuación característica para $\mathbf{Q}$ es

$$\lambda^2 - \left(2 + y^2 + y^{-2}\right)\lambda + \left(1 + y^2\right)\left(1 + y^{-2}\right) - \left(x^4 + x^{-4} + y^2 + y^{-2}\right) = 0. \tag{36}$$

Luego de algunas simplificaciones,

$$\lambda^2 - \left(y + y^{-1}\right)^2 \lambda - \left(x^2 - x^{-2}\right)^2 = 0. \tag{37}$$

Las soluciones son

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left[\left(y + y^{-1}\right)^2 \pm \sqrt{\left(y + y^{-1}\right)^4 + 4\left(x^2 - x^{-2}\right)^2}\right]. \tag{38}$$

El autovalor λ_+ es positivo, mientras que λ_- es negativo. Lo que importa es que $|\lambda_-| < \lambda_+$. Tenemos que

$$\frac{1}{N}\log Z = \frac{1}{N}\log\left(\lambda_+^{N/2} + \lambda_-^{N/2}\right) = \tfrac{1}{2}\log\lambda_+ + \frac{1}{N}\log\left[1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{N/2}\right]. \tag{39}$$

En el límite $N \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\log Z \to \tfrac{1}{2}\log\lambda_+. \tag{40}$$

La energía libre por espín es

$$f = -\tfrac{1}{2}kT\log\lambda_+. \tag{41}$$

Introduciendo, como es habitual, la variable $b = \beta\mu B$, la magnetización media por espín es

$$m = \frac{\partial}{\partial b}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda_+}{\partial b}. \tag{42}$$

Pero, ya que todo está escrito en términos de $y = e^b$, conviene calcular m como

$$m = \frac{y}{2}\frac{\partial \log\lambda_+}{\partial y} = \frac{y}{2\lambda_+}\frac{\partial\lambda_+}{\partial y}. \tag{43}$$

La propia función λ_+ depende de y sólo a través de la combinación

$$z = \left(y + y^{-1}\right)^2, \tag{44}$$

de forma que lo más cómodo es, en definitiva, escribir

$$m = \frac{y}{2\lambda_+}\frac{dz}{dy}\frac{\partial\lambda_+}{\partial z} = \frac{y}{\lambda_+}\left(y + y^{-1}\right)\left(1 - y^{-2}\right)\frac{\partial\lambda_+}{\partial z} = \frac{1}{2\lambda_+}\left(y^2 - y^{-2}\right)\frac{\partial\lambda_+}{\partial z}. \tag{45}$$

Tenemos

$$\lambda_+ = \tfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 + a}\right), \tag{46}$$

donde

$$a = 4(x^2 - x^{-2})^2. \tag{47}$$

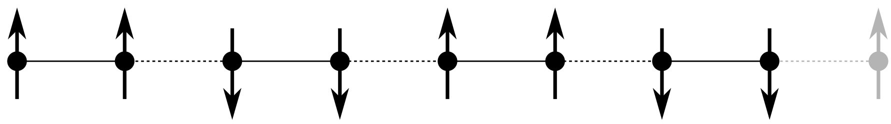
Luego,

$$\frac{1}{\lambda_+}\frac{\partial\lambda_+}{\partial z} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 + a}}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}}. \tag{48}$$

Finalmente,

$$m = \frac{y^2 - y^{-2}}{\sqrt{\left(y + y^{-1}\right)^4 + 4\left(x^2 - x^{-2}\right)^2}}. \tag{49}$$

Un resultado interesante es que en el límite en que $|J| \to \infty$, la magnetización tiende a cero. En ese límite, el sistema tiende a ordenarse como muestra la figura.



Esta familia de estados minimiza la energía.