Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2024

Guía 1: problema 11*

■ **Problema 11**. Un resorte cambia de comportamiento si, manteniendo constante la temperatura, se lo estira más allá de cierta longitud. El cambio en el resorte puede tratarse como una transición de fase. Para pequeños estiramientos (la fase normal del resorte), su energía libre de Helmholtz está dada por

$$\frac{A}{M} = \tfrac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

donde M es la masa del resorte y $x = L/M$ es su longitud por unidad de masa (usamos A en lugar de F ya que hay fuerzas involucradas). Cuando el resorte se ha estirado demasiado y se ha producido la transición a su nueva fase, la energía libre es

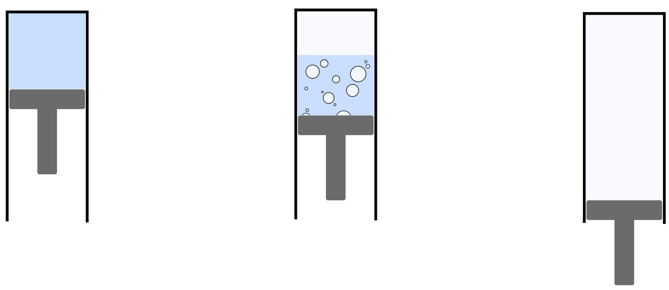
$$\frac{A}{M} = \tfrac{1}{2}h\,(x - x_0)^2 + c. \tag{2}$$

En estas ecuaciones, k, h, x_0 y c son todas independientes de x pero pueden depender de T. Asimismo $h < k$ (el resorte se *ablanda*) y tanto c como x_0 son mayores que cero para todo valor de T.

e) Determinar el cambio *discontinuo* en x cuando el resorte cambia de fase.

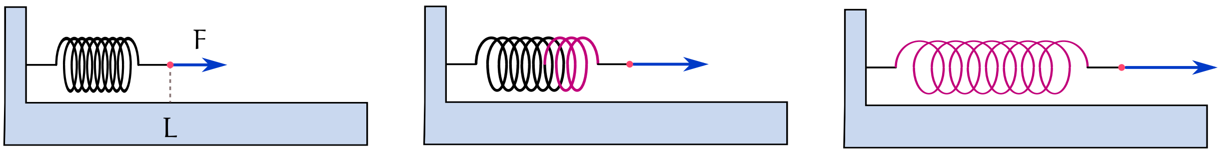
■ **Solución**. No vamos a seguir exactamente los ítems del enunciado, de los cuales sólo hemos retenido el último. Aquí está el enunciado original. Ustedes pueden resolver el resto del problema luego de leer esta solución.

Casi todos habrán observado el siguiente fenómeno: cuando se llena parcialmente una jeringa con agua y se expulsa el aire, si se obtura el pico y se desplaza el émbolo hacia afuera, el agua hierve y en la cavidad de la jeringa se produce un aparente vacío. En realidad, este espacio está ocupado principalmente por agua en estado gaseoso. Cuando se desplaza el émbolo, la fracción de la cavidad de la jeringa ocupada por cada fase cambia de manera continua. Si la jeringa fuera lo bastante larga o la cantidad de agua lo bastante pequeña, uno podría retirar el émbolo la distancia suficiente como para que toda el agua pase al estado gaseoso. En la práctica eso es muy difícil, porque existe una disparidad de 1 a 1000 entre las densidades de cada fase; pero, en principio, es posible.



*zanellaj@df.uba.ar

La transición de fase de la que habla el problema es análoga al experimento de la jeringa: a temperatura constante, la longitud de un resorte se varía de forma continua desde un valor relativamente pequeño hasta un valor relativamente grande. Qué tan pequeño y qué tan grande, lo veremos después. Al principio, todo el resorte está en la fase normal, pero, sobrepasado cierto valor de la longitud, una fracción finita del resorte se encontrará en la fase deformada. Si la longitud crece aún más, llegará un punto a partir del cual todo el resorte estará en la fase deformada.



Si el estiramiento se revierte, el resorte experimenta la transformación inversa. Un resorte real no se comporta de esta manera. Si se estira demasiado, un resorte real se deforma irreversiblemente. Tal vez sería más apropiado hablar, sin mayores precisiones, de cierto material elástico.

En general, debemos tratar al sistema del resorte como un sistema compuesto por dos sistemas simples. Puede haber una fracción del resorte en la fase normal, digamos, la fase 1, y una fracción en la fase deformada, digamos, la fase 2. Así, la energía libre del resorte es la suma de las energías libres de cada fase:

$$A(T, L_1, L_2, m_1, m_2) = A_1(T, L_1, m_1) + A_2(T, L_2, m_2), \tag{3}$$

donde L_i y m_i son las longitudes y masas de cada fracción del resorte. Esta expresión de la energía libre asume que las variables L_1, L_2, m_1 y m_2 son independientes. En el lenguaje de Callen, hay vínculos internos que fijan los valores de estas cantidades. El problema es encontrar los valores de equilibrio cuando los vínculos son eliminados y el sistema alcanza el equilibrio.

Si las energías libres son extensivas (los datos del problema corresponden a este caso),

$$A_i(T, L_i, m_i) = m_i a_i\left(T, \frac{L_i}{m_i}\right). \tag{4}$$

Como en el experimento del problema la temperatura es constante, omitiremos la dependencia con T. La energía libre del resorte será

$$A(L_1, L_2, m_1, m_2) = m_1 a_1\left(\frac{L_1}{m_1}\right) + m_2 a_2\left(\frac{L_2}{m_2}\right). \tag{5}$$

Cuando dejamos libradas las longitudes y masas de cada fase, el estado de equilibrio es aquel que minimiza la energía libre A. Esto quiere decir que debemos encontrar las condiciones para las cuales la variación de A es cero. En un segundo paso, uno debería verificar que se trata del mínimo de A.

Hay cuatro cosas que podemos variar. La variación de A es entonces

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial m_1}\delta m_1 + \frac{\partial A}{\partial m_2}\delta m_2 + \frac{\partial A}{\partial L_1}\delta L_1 + \frac{\partial A}{\partial L_2}\delta L_2. \tag{6}$$

La variación de A está sujeta a dos condiciones: la longitud total del resorte es L y la masa total del resorte es M,

$$L_1 + L_2 = L, \qquad m_1 + m_2 = M. \tag{7}$$

Esto significa que $\delta L_2 = -\delta L_1$ y que $\delta m_2 = -\delta m_1$. Luego,

$$\delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial m_1} - \frac{\partial A}{\partial m_2}\right)\delta m_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial L_1} - \frac{\partial A}{\partial L_2}\right)\delta L_1. \tag{8}$$

Usando la descomposición explícita de A, Ec. (5),

$$\begin{aligned}\delta A = &\left\{\left[a_1\left(\frac{L_1}{m_1}\right) - \frac{L_1}{m_1}a_1'\left(\frac{L_1}{m_1}\right)\right] - \left[a_2\left(\frac{L_2}{m_2}\right) - \frac{L_2}{m_2}a_2'\left(\frac{L_2}{m_2}\right)\right]\right\}\delta m_1 \\ &+ \left[a_1'\left(\frac{L_1}{m_1}\right) - a_2'\left(\frac{L_2}{m_2}\right)\right]\delta L_1.\end{aligned} \tag{9}$$

Las variaciones de m_1 y L_1 son independientes, de modo que debe anularse cada término entre corchetes:

$$\begin{aligned}&a_1\left(\frac{L_1}{m_1}\right) - \frac{L_1}{m_1}a_1'\left(\frac{L_1}{m_1}\right) = a_2\left(\frac{L_2}{m_2}\right) - \frac{L_2}{m_2}a_2'\left(\frac{L_2}{m_2}\right), \\ &a_1'\left(\frac{L_1}{m_1}\right) = a_2'\left(\frac{L_2}{m_2}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

En estas ecuaciones sólo intervienen las variables $x_i = L_i/m_i$, de forma que podemos reescribirlas, más brevemente, como

$$\begin{aligned}&a_1(x_1) - x_1 a_1'(x_1) = a_2(x_2) - x_2 a_2'(x_2), \\ &a_1'(x_1) = a_2'(x_2).\end{aligned} \tag{11}$$

Si las dos fases están presentes, x_1 y x_2 deben tomar los valores determinados por las ecuaciones anteriores. Estos valores son constantes específicas: no dependen de M ni de L, dependen únicamente de los parámetros involucrados en la definición de las funciones a_i. Sólo los debemos calcular una vez. Conocidos x_1 y x_2, y dados los valores de L y M, podemos determinar las longitudes y masas de cada fracción del resorte.

La variable que controlamos en el experimento es la longitud L. Escribamos primero

$$\begin{aligned} L &= x_1 m_1 + x_2 m_2, \\ M &= m_1 + m_2. \end{aligned} \tag{12}$$

De aquí resulta

$$m_1 = \frac{x_2 M - L}{x_2 - x_1}, \qquad m_2 = \frac{L - x_1 M}{x_2 - x_1}. \tag{13}$$

Además,

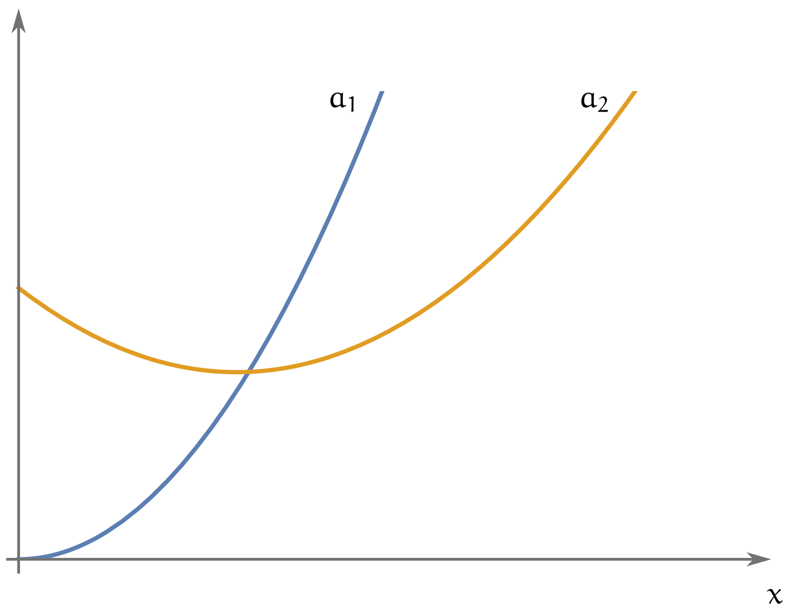
$$L_1 = \frac{x_2 M - L}{x_2 - x_1}\, x_1, \qquad L_2 = \frac{L - x_1 M}{x_2 - x_1}\, x_2. \tag{14}$$

Asumiendo que existen soluciones reales para x_1 y x_2, y que $x_2 > x_1$, las ecuaciones anteriores implican que la fase 1 del resorte sólo puede existir si $L \leqslant x_2 M$, mientras que la fase 2 sólo puede existir si $L \geqslant x_1 M$. Si $x_1 M \leqslant L \leqslant x_2 M$, entonces las dos fases coexisten. Es lo que esperábamos intuitivamente: para longitudes cortas, el resorte está enteramente en la fase normal. Para longitudes largas, está por completo en su fase deformada. Para cierto rango de longitudes intermedias, hay una fracción del resorte en cada fase.

Esto quedará más claro al analizar el ejemplo concreto del problema. Las funciones a_i son cuadráticas,

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \tfrac{1}{2} k x^2, \\ a_2(x) &= \tfrac{1}{2} h (x - x_0)^2 + c. \end{aligned} \tag{15}$$

Todos los parámetros que aparecen en estas ecuaciones son mayores que cero y, además, $k > h$. El gráfico de estas funciones debe ser como el que muestra la siguiente figura.

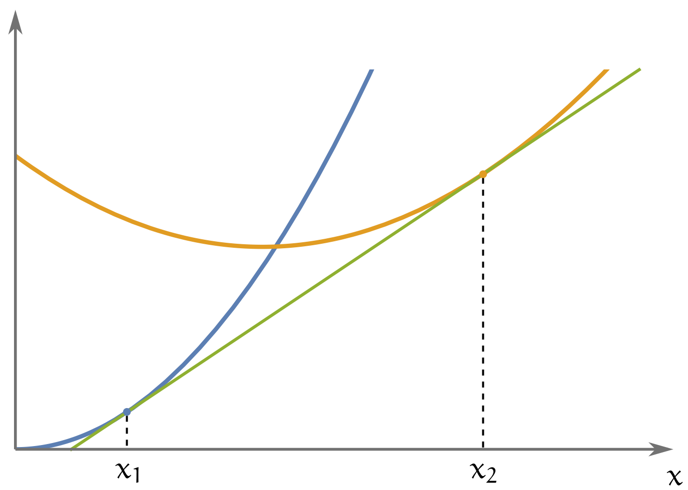


Es evidente que, para longitudes pequeñas, la energía libre A se minimiza si todo el resorte está en la fase 1. Análogamente, para longitudes grandes, el resorte estará enteramente en la fase 2. El gráfico parecería indicar que la transición de *todo* el resorte de una fase a la otra se produce en el punto en el que se intersectan las curvas de las energías libres de cada fase. Sin embargo, esto es falso. El verdadero mínimo de A se obtiene permitiendo que las dos fases coexistan.

En primer lugar, debemos determinar x_1 y x_2, definidas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1(x_1) - x_1 a_1'(x_1) &= a_2(x_2) - x_2 a_2'(x_2), \\ a_1'(x_1) - a_2'(x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Es sencillo construir la solución gráficamente. La segunda ecuación indica que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de a_1 en x_1 es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de a_2 en x_2. Existen infinitos pares de puntos que satisfacen esta condición. Pero la primera Ec. (16) significa que las ordenadas al origen de las rectas tangentes a las gráficas de a_1 y a_2 en los puntos x_1 y x_2 también deben ser iguales. Si las pendientes y las ordenadas al origen de las rectas tangentes de cada curva en los puntos x_1 y x_2 son iguales, entonces la misma recta debe ser tangente a ambas curvas. Los puntos x_1 y x_2 se encuentran buscando la recta que es tangente simultáneamente a las gráficas de a_1 y a_2. Puede haber varias soluciones, pero sólo una tendrá sentido físico. La siguiente figura muestra la solución gráfica del sistema (16).



La energía libre total en el equilibrio es una función de la longitud,

$$A(L) = m_1 a_1(x_1) + m_2 a_2(x_2) = \frac{x_2 M - L}{x_2 - x_1}\, a_1(x_1) + \frac{L - x_1 M}{x_2 - x_1}\, a_2(x_2). \tag{17}$$

Mientras coexistan las dos fases, la energía libre total es una función lineal de L. Agrupando términos,

$$A(L) = M\left[\frac{x_2 a_1(x_1) - x_1 a_2(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{a_2(x_2) - a_1(x_1)}{x_2 - x_1}\, x\right], \tag{18}$$

donde hemos definido

$$x = \frac{L}{M}. \tag{19}$$

Considerada como función de x, cuando coexisten las dos fases, la gráfica de la energía libre interpola linealmente entre los puntos $\{x_1, a_1(x_1)\}$ y $\{x_2, a_2(x_2)\}$. Como vimos antes, la fracción del resorte en cada estado también se comporta linealmente. Por ejemplo,

$$\frac{m_1}{M} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}. \tag{20}$$

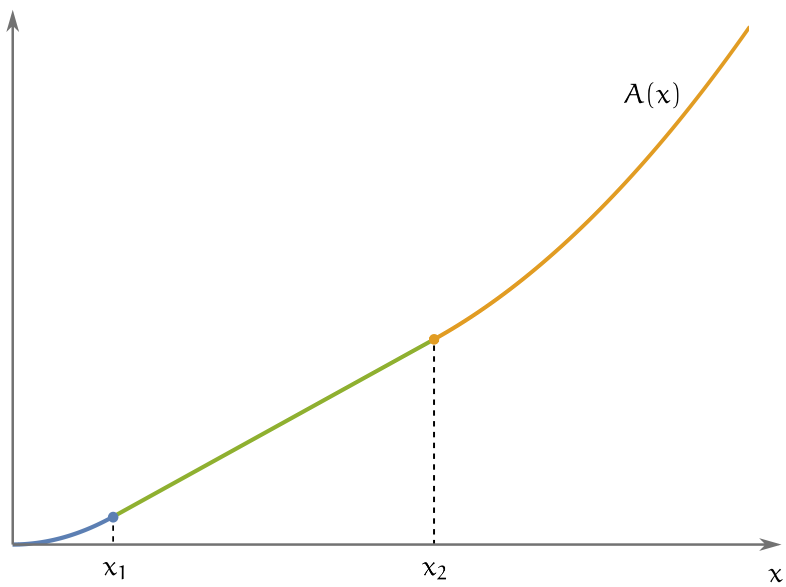
Esta fracción disminuye desde uno, cuando $x = x_1$, hasta cero, cuando $x = x_2$. La transición de fase ocurre mientras la longitud del resorte aumenta entre $L_1 = x_1 M$ y $L_2 = x_2 M$. Cuando $x < x_1$, todo el resorte está en la fase normal y la energía libre es

$$A(L) = M a_1(x) = M a_1\left(\frac{L}{M}\right). \tag{21}$$

Análogamente, cuando $x > x_2$, todo el resorte está en la fase deformada y la energía libre es

$$A(L) = M a_2(x) = M a_2\left(\frac{L}{M}\right). \tag{22}$$

Considerada como función de x, la gráfica de la energía libre es la que muestra la figura.



Al pasar de una fase a la otra, el cambio neto en la longitud del resorte es

$$\Delta L = L_2 - L_1. \tag{23}$$

Mientras se produce el cambio de fase, las dos fases del resorte se encuentran en equilibrio mecánico, lo que está implícito en la segunda Ec. (16). Esto quiere decir que la tensión a lo largo del resorte es uniforme. Recordemos que para un sistema simple caracterizado por una tensión F, una longitud ℓ y una masa m, la forma diferencial para la energía libre de Helmholtz es

$$dA = -SdT + Fd\ell + \mu dm. \tag{24}$$

Convencionalmente, la tensión F es positiva si el sistema hace un trabajo positivo al contraerse. Nótese la diferencia con un sistema hidrostático, en donde la presión es positiva si el sistema hace un trabajo positivo al expandirse,

$$dA = -SdT - PdV + \mu dN. \tag{25}$$

Si el sistema es extensivo, la forma diferencial de la energía libre de Helmholtz por unidad de masa es

$$da = -sdT + Fdx. \tag{26}$$

(Demostrar esta ecuación queda como ejercicio). La relación que nos interesa aquí es

$$\frac{\partial a}{\partial x} = F. \tag{27}$$

Volviendo al problema, si $x < x_1$, la tensión a lo largo del resorte puede calcularse como

$$F = \frac{\partial a_1(x)}{\partial x}. \tag{28}$$

Teniendo en cuenta la forma explícita de a_1, la tensión se comporta linealmente,

$$F = kx, \tag{29}$$

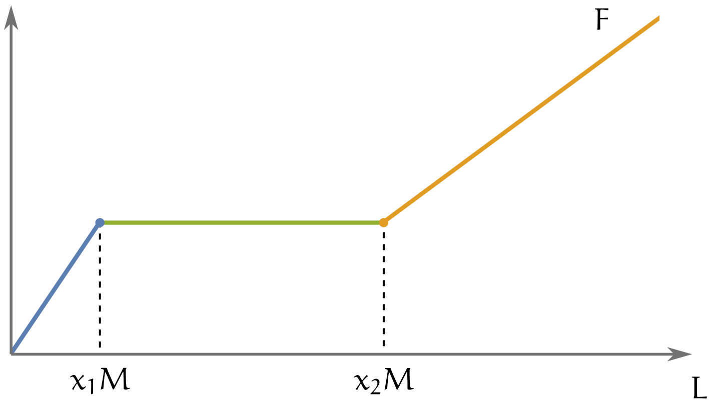
como en un resorte usual. Para $x_2 < x$,

$$F = \frac{\partial a_2(x)}{\partial x} = h(x - x_0). \tag{30}$$

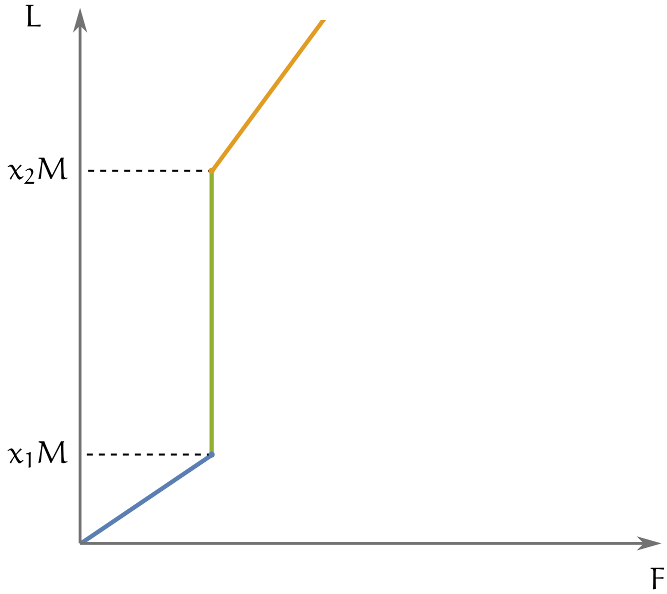
Si $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, coexisten las dos fases. La fase normal, con una longitud por unidad de masa igual a x_1, y la fase deformada, con una longitud por unidad de masa igual a x_2. La tensión puede calcularse en cualquier de las dos fases, puesto que la segunda condición (16) asegura su igualdad.

$$F = \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x} = \frac{\partial a_2(x_2)}{\partial x}. \tag{31}$$

Cuando coexisten las dos fases, la tensión es constante. La figura muestra la tensión en función de la longitud del resorte.



En el enunciado del problema se habla de un cambio discontinuo en la longitud. Pero, en todo lo que hemos dicho hasta ahora, la longitud varía de manera continua. La función que es discontinua es la longitud considerada como función de la tensión, como muestra la última figura.



Queda como ejercicio que calculen explícitamente x_1, x_2 y ΔL para las funciones dadas en el enunciado del problema. Más aún, queda como ejercicio que resuelvan el problema tal como está planteado en la guía.