Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2024

Guía 2: *Combinatoria, probabilidades y entropía*

I. Combinatoria

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar cinco personas en hilera? ¿De cuántas maneras si A y B deben estar una al lado de la otra? ¿De cuántas maneras si forman un círculo?

2. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con las letras a, b, c, d, e y f? Considerar los dos casos: i) sin repetir letras, ii) no importa si se repiten letras.

3. ¿Cuántos anagramas diferentes tiene la palabra *manzana*?

4. ¿Cuántos pares de personas pueden elegirse entre n personas?

5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir $2n$ personas en n parejas?

6. Hay N libros y M cajas. Cada caja puede contener hasta N libros. Cuántas maneras hay de distribuir los libros en las cajas si:

    a) Los libros son todos iguales y las cajas todas distintas.
    b) Los libros y las cajas son todos distintos.
    c) Los libros y las cajas son todos iguales.
    d) Los libros son todos distintos y las cajas todas iguales.

7. a) Hay N monedas alineadas en N sitios numerados de 1 a N. ¿Cuántas secuencias se pueden formar que tengan n monedas mostrando cara?
    b) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en donde hayan aparecido n caras?
    c) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que no haya dos caras seguidas?
    d) Una moneda se arroja N veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que dos caras seguidas recién aparecen en los dos últimos tiros?
    e) Se arrojan nueve monedas distinguibles. ¿Cuántos lanzamientos posibles existen en donde el número de caras es par? ¿Y si fueran 99 monedas?

8. Considerar una fila de N monedas que muestran cara o ceca. No hay una dirección privilegiada desde la cual leer la secuencia de monedas: dos secuencias relacionadas por una reflexión se consideran iguales. Así, para cuatro monedas, las secuencias

$$\times\circ\circ\circ \quad \text{y} \quad \circ\circ\circ\times$$

se consideran iguales. ¿Cuántas secuencias distintas existen? ¿Cuántas secuencias simétricas existen? Por ejemplo, la siguiente la secuencia de siete monedas es simétrica:

$$\times\circ\circ\times\circ\circ\times$$

II. Probabilidades

9. Suponiendo que las monedas del problema 7 tienen igual probabilidad de mostrar cara o ceca, calcule las probabilidades de los sucesos de los ítems b–e.

10. **El problema del cumpleaños**. En un aula hay n personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es 1/365, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad p_n de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad p_n supere el 50%? Tome por asalto una computadora y grafique p_n.

11. **Falso positivo**. Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal, asintomática, hasta que la cabeza explota. Es una enfermedad extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 100 millones de personas. Por suerte, se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, EL LABORATORIO que vende el test recomienda aplicar el test a toda la población. "Además", argumenta EL LABORATORIO desinteresadamente, "el test es 99,9999% *infalible*" (las itálicas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). O sea, ¡una chance en un millón de que el test falle! ¿No es como decir que el test es perfecto? ¿Quién no apostaría a que el resultado del test está en lo cierto?

    a) Pues bien. Usted se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ya mismo dejar todos sus asuntos en orden y a cubrirse la cabeza con una BOLSA®, que también comercializa EL LABORATORIO? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?

    b) Si el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?

    c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

12. **Aproximación gaussiana de la distribución binomial**. Se trata de un caso particular del Teorema del límite central. La distribución binomial para N pruebas con probabilidad de éxito p puede escribirse como

$$P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Aunque se aplica a n entero, no hay dificultad en extender la función a todos los reales. Defina $P(x) = e^{f(x)}$. En lugar de aproximar $P(x)$ vamos a aproximar $f(x)$.

a) Escriba $f(x)$ usando la aproximación de Stirling para el número binomial, es decir, usando que $\log z! \simeq z \log z - z$.

b) La función $P(x)$ es apreciablemente distinta de cero sólo cerca de su máximo, de manera que necesitamos una aproximación para $f(x)$ en esa región. Usando el resultado del ítem anterior, encuentre la posición x_0 del máximo de $P(x)$. Note que esto es equivalente a encontrar el máximo de $f(x)$.

c) Desarrolle $f(x)$ alrededor de x_0 hasta orden cuadrático. Verifique que es un máximo.

d) Reemplace la aproximación cuadrática para $f(x)$ en la definición $P(x) = e^{f(x)}$ y encuentre así la gaussiana que aproxima a $P(x)$. *Nota*: términos omitidos en la aproximación de Stirling, que no afectan en la práctica la localización del máximo ni la aproximación para $f(x)$, sí contribuyen, sin embargo, con un factor de normalización, que en nuestra aproximación falta. Esto puede remediarse multiplicando el resultado por la constante adecuada que haga $\int P(x) = 1$. Calcule esta constante. No sería necesario recurrir a este último paso si usáramos la aproximación de Stirling más precisa, $\log z! \simeq \log \sqrt{2\pi z} + z \log z - z$.

e) Compare el valor medio y la dispersión de la distribución gaussiana aproximada con el valor medio y la dispersión de la distribución binomial original.

13. **El problema de Jacob Bernoulli**. En *Ars cojectandi*, Bernoulli plantea el siguiente problema. Una urna contiene fichas blancas y negras en proporción de 3 a 2. Así, la probabilidad de extraer una ficha blanca es $p = \frac{3}{5}$. En cada paso se extrae una ficha, se anota su color y se la devuelve a la urna. Qué número N de veces debe repetirse este proceso para que, con una probabilidad de $\frac{1000}{1001}$, la fracción de fichas blancas extraídas esté entre $\frac{29}{50}$ y $\frac{31}{50}$. El problema está relacionado con la Ley de los grandes números. Qué tan grande tiene que ser una muestra para que la frecuencia de los resultados aproxime a la probabilidad con un dado error. Bernoulli sólo dio un valor de N máximo, igual a 25 550, que resulta en realidad muy conservativo. Para dar con el valor preciso de N, usted necesitará hacer el cálculo en una computadora: puede usar la distribución binomial y hacer las sumas necesarias numéricamente, o aproximar la distribución por una normal y usar la inversa de la función error. Esta función está definida en la mayoría de los programas de cálculo y también existen calculadoras en la web, basta con buscar "inverse error function online".

14. **Problème des rencontres.** Hay n objetos, dispuestos en n sitios según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad p_n de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones que no dejan ningún elemento en su posición original. Los ordenamientos que tienen esta propiedad se llaman *desarreglos*. El número de desarreglos de n elementos

suele llamarse subfactorial y notarse con los símbolos $!n$ o d_n. Resulta complicado contar directamente el número de desarreglos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí. En particular, en este problema se usa el método de la función generatriz.

a) Considere los casos $n = 1, 2, 3$ y 4. Encuentre los valores correspondientes de d_n.

b) Demuestre que, en general, d_n satisface la siguiente relación de recurrencia

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

c) Muestre que, en términos de las probabilidades, la ecuación anterior implica

$$np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}.$$

d) A partir de esta relación de recurrencia, extienda la definición de p_n para todo n entero. ¿Cuánto vale p_0? ¿Cuánto vale p_n con $n < 0$?

e) Defina la función generatriz

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n x^n$$

y transforme la relación de recurrencia para p_n en una ecuación diferencial para $F(x)$.

f) Resuelva la ecuación diferencial para $F(x)$. La condición inicial puede determinarse calculando explícitamente $F(0)$.

g) Desarrollando $F(x)$ en potencias de x, encuentre p_n.

h) Muestre que $p_n \to e^{-1}$ cuando $n \to \infty$. Para ver qué tan rápida es la convergencia, grafique p_n.

15. **El modelo de Ehrenfest**. Para ilustrar la tendencia al equilibrio, Tatiana y Paul Ehrenfest propusieron el siguiente modelo: N fichas, numeradas de 1 a N, se distribuyen en dos urnas. En cada paso, una ficha se elige al azar y se la cambia de urna. La variable aleatoria es el número n de fichas en la primera urna. Llamaremos $p_m(n)$ a la probabilidad de que luego de m pasos esta urna contenga n fichas.

    a) Escriba la ecuación de evolución para la probabilidad, es decir, una ecuación que dé $p_{m+1}(n)$ en términos de las probabilidades en el paso anterior.

    b) Mostrar que la solución estacionaria, $p(n)$, es una binomial. *Sugerencia:* la condición de distribución estacionaria quedará en la forma de una ecuación de recurrencia para $p(n)$. Esto puede resolverse con el método de la **función generatriz**, definiendo la función auxiliar $F(x) = \sum x^n p(n)$ y transformando la ecuación de recurrencia para p en una ecuación diferencial para F, sujeta a la condición $F(1) = 1$. Los coeficientes del desarrollo de $F(x)$ en potencias de x son las probabilidades $p(n)$.

16. Arnulfo y Burgundófora juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si Arnulfo hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. *Sugerencia:* hay infinitos caminos independientes que llevan a uno u otro ganador; la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino.

17. a) En el problema del decaimiento radiactivo, un núcleo activo a tiempo $t = 0$ tiene una probabilidad $w(t) = e^{-\lambda t}$ de continuar activo a tiempo t, donde λ es una constante positiva. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de que decaiga a tiempo t? Suponiendo que está activo en $t = 0$, ¿cuál es el valor medio del tiempo hasta el decaimiento? La densidad de probabilidad $f(t)$ se define del siguiente modo: la probabilidad de que el núcleo activo a tiempo $t = 0$ decaiga entre t y $t + dt$, con $dt \geqslant 0$, es igual a $f(t)dt$.

    b) Si hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$, ¿cuál es la densidad de probabilidad de que el sistema decaiga a tiempo t a un estado con $N - 1$ núcleos activos? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta el primer decaimiento? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta que decaen los N núcleos iniciales? ¿Cómo se compara el tiempo de vida medio con el valor medio del tiempo hasta que decaen $N/2$ núcleos? Recordar que el tiempo de vida medio es igual al tiempo en el que el valor medio del número de núcleos activos decae a la mitad de su valor inicial.

III. Información y Entropía

18. En Teoría de la Información, la entropía se define como

$$S = -\sum_{r=1}^{M} p(r) \log p(r),$$

donde $p(r)$ es la probabilidad del estado r, entre M posibles. A mayor entropía, mayor es la incertidumbre antes de conocer el estado de un sistema y, entonces, mayor es la información que se gana al conocerlo. Por ejemplo, ¿qué pasa con S cuando uno de los estados ocurre con probabilidad 1?

    a) Graficar $x \log x$ en el intervalo $[0, 1]$.

    b) Demostrar que S es no negativa y que es máxima cuando todos los estados tienen igual probabilidad, $p(r) = 1/M$. *Sugerencia:* que hay un extremo es fácil; demostrar que es un máximo es más difícil. Las dos cosas pueden hacerse en un solo paso usando la llamada desigualdad de Jensen, de la teoría de funciones convexas. Si Φ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_k\right) \leqslant \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Phi(a_k).$$

(Es fácil entender esta desigualdad si se piensa a $\Phi(x)$ como la función que define la coordenada y de cierto arco convexo, con una distribución de masas iguales sobre el arco y cuyas coordenadas x son las cantidades a_k. La desigualdad dice que el centro de masa está *dentro* del arco, lo que es bastante intuitivo; Callen, §17-1).

19. Calcular la entropía para las siguientes distribuciones:

    a) Uniforme discreta: $P(n) = \frac{1}{N}$; con $n = 1, 2, \ldots, N$.
    b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n \,(1-p)^{N-n}$; con $n, N \in \mathbb{N}$ y $p < 1$.
    c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$; con $x \in [0, L]$.
    d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; con $x, \lambda \geqslant 0$.
    e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; con $-\infty < x < \infty$.

    Para las variables continuas, debe reemplazar la sumatoria, en la definición de la entropía, por una integral sobre el soporte de la variable. En ese caso, se habla de "Entropía Diferencial".

20. **Principio de Máxima Entropía**. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidades de Máxima Entropía de una variable aleatoria si:

    a) $\langle x \rangle = \mu$, donde $0 \leqslant x < \infty$.
    b) $\langle x \rangle = \mu$ y $\left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle = \sigma^2$, donde $-\infty < x < \infty$.

21. En un dado, el número seis tiene el doble de probabilidad de salir que el número uno. Las otras cuatro caras aparecen con igual probabilidad. ¿Cuáles son las probabilidades p_m, con $1 \leqslant m \leqslant 6$, que maximizan la entropía?

22. Considere un experimento con espacio muestral discreto, A_k, con $k = 1, \ldots, n$. Calcule la distribución de probabilidades que maximiza la entropía, sujeta a los n vínculos $\langle A_k \rangle = a_k$. No es necesario que obtenga el valor de los multiplicadores de Lagrange, pero sí que indique de qué ecuaciones habría que despejarlos. Calcule la entropía de esta distribución, así como su derivada respecto a los parámetros a_k.