

Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2024

Guía 2: problema 17

- a) En el problema del decaimiento radioactivo, un núcleo activo a tiempo $t = 0$ tiene una probabilidad $w(t) = e^{-\lambda t}$ de continuar activo a tiempo t , donde λ es una constante positiva. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de que decaiga a tiempo t ? Suponiendo que está activo en $t = 0$, ¿cuál es el valor medio del tiempo hasta el decaimiento? La densidad de probabilidad $f(t)$ se define del siguiente modo: la probabilidad de que el núcleo activo a tiempo $t = 0$ decaiga entre t y $t + dt$, con $dt \geq 0$, es igual a $f(t)dt$.
- b) Si hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$, ¿cuál es la densidad de probabilidad de que el sistema decaiga a tiempo t a un estado con $N - 1$ núcleos activos? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta el primer decaimiento? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta que decaen los N núcleos iniciales? ¿Cómo se compara el tiempo de vida medio con el valor medio del tiempo hasta que decaen $N/2$ núcleos? Recordar que el tiempo de vida medio es igual al tiempo en el que el valor medio del número de núcleos activos decae a la mitad de su valor inicial.

■ **Solución.** Recordemos primero el origen de la expresión $w(t) = e^{-\lambda t}$ para la probabilidad de que un núcleo activo a tiempo $t = 0$ siga activo a tiempo t . El proceso estocástico que determina el estado de un núcleo se define del siguiente modo: dado un núcleo activo a tiempo t , la probabilidad Δp de que decaiga entre t y $t + \Delta t$, con $\Delta t \geq 0$ está dada aproximadamente por

$$\Delta p \simeq \lambda \Delta t. \quad (1)$$

Esto es válido siempre que $\lambda \Delta t \ll 1$. La relación anterior es exacta en el límite en el que $\Delta t \rightarrow 0$, en cuyo caso la escribimos como una relación entre diferenciales,

$$dp = \lambda dt. \quad (2)$$

Como antes, llamemos $w(t)$ a la probabilidad de que un núcleo activo a tiempo $t = 0$ siga activo a tiempo t . El objetivo es escribir una ecuación diferencial que gobierne el comportamiento de $w(t)$. La condición inicial es $w(0) = 1$, debido a que en $t = 0$ existe la certeza de que el núcleo está activo. La probabilidad de que el núcleo esté activo a tiempo $t + dt$, con $dt \geq 0$, es igual a la probabilidad de que esté activo a tiempo t multiplicada por la probabilidad de que no decaiga en el intervalo entre t y $t + dt$. Puesto que la probabilidad de que decaiga es λdt , la probabilidad de que no decaiga es $1 - \lambda dt$. Entonces,

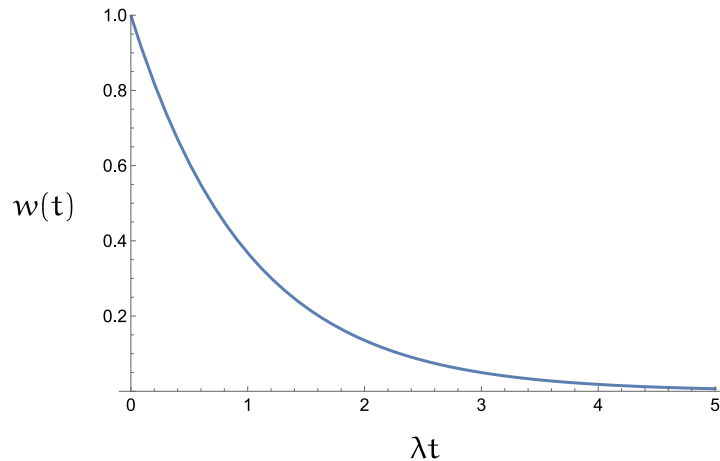
$$w(t + dt) = w(t) \times (1 - \lambda dt). \quad (3)$$

Esto significa que w satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\lambda. \quad (4)$$

Junto con la condición inicial $w(0) = 1$, resulta

$$w(t) = e^{-\lambda t}. \quad (5)$$



La pregunta ahora es cuál es la densidad de probabilidad de que un núcleo activo a tiempo $t = 0$ decaiga a tiempo t . Hay que calcular entonces cuál es la probabilidad de que decaiga entre t y $t + dt$, con $dt \geq 0$. Tienen que suceder dos cosas: i) el núcleo tiene que estar activo a tiempo t y ii) tiene que decaer entre t y $t + dt$. La probabilidad de que eso ocurra será igual al producto de las probabilidades de cada suceso,

$$dp = w(t) \times \lambda dt = \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (6)$$

La densidad de probabilidad que pide el enunciado es

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (7)$$

La probabilidad de que el núcleo decaiga en algún momento es igual a uno. En efecto,

$$\int dp = \int_0^{\infty} dt \lambda e^{-\lambda t} = 1. \quad (8)$$

Ahora hay que considerar un conjunto de N núcleos. Si hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$, la densidad de probabilidad de que el sistema decaiga a tiempo t a un estado con $N-1$ núcleos activos debe contemplar tres cosas: que los N núcleos sobrevivan hasta tiempo t , que entonces uno de los núcleos decaiga y que $N-1$ núcleos no decaigan. Además, hay N maneras de elegir cuál es el núcleo que decae. Si $\lambda \Delta t \ll 1$, la probabilidad de que ocurra lo anterior estará dada aproximadamente por

$$\Delta P \simeq N \times w(t)^N \times (1 - \lambda \Delta t)^{N-1} \times \lambda \Delta t. \quad (9)$$

En el límite en el que $\Delta t \rightarrow 0$, debemos conservar términos a lo sumo de orden Δt y escribir la relación anterior como una relación entre diferenciales,

$$dP = \lambda N w(t)^N dt. \quad (10)$$

La densidad de probabilidad buscada es

$$F(t) = \lambda N w(t)^N = \lambda N e^{-\lambda N t}. \quad (11)$$

El valor medio del tiempo hasta que se produce el primer decaimiento es

$$t_N = \int_0^{\infty} dt t F(t) = \frac{1}{\lambda N}. \quad (12)$$

Es natural que cuantos más núcleos haya, menos tiempo habrá que esperar, en promedio, hasta que se produzca el primer decaimiento. La ecuación anterior indica que este tiempo es inversamente proporcional al número de núcleos.

Nos preguntamos ahora cuál es el tiempo medio hasta que decaen los N núcleos iniciales. Para que los N núcleos decaigan, primero tiene que decaer un núcleo, y quedar $N - 1$ núcleos activos. Luego tiene que decaer un segundo núcleo, y quedar $N - 2$ núcleos activos, etc. El tiempo total es la suma de los tiempos en los que se produce cada decaimiento individual. El tiempo medio total será la suma de los tiempos medios hasta cada decaimiento:

$$T_N = t_N + t_{N-1} + t_{N-2} + \dots + t_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right). \quad (13)$$

Los números definidos por esta serie finita reciben el nombre de números armónicos,

$$H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \quad (14)$$

De manera que

$$T_N = \frac{1}{\lambda} H_N. \quad (15)$$

Supongamos que N es par. Por un razonamiento similar al anterior, el tiempo medio hasta que decaen la mitad de los núcleos es

$$T_{N/2} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2}N + 1} \right). \quad (16)$$

Más usual es calcular el llamado tiempo de vida medio, que está definido a través de la evolución del número medio de núcleos activos. Eso nos lleva a resolver antes otro problema: ¿cuál es la probabilidad de que haya k núcleos activos a tiempo $t \geq 0$ si inicialmente hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$?

La ecuación maestra

Si se nos pregunta cuál es la probabilidad de que haya k núcleos activos a tiempo $t \geq 0$ si había N núcleos activos a tiempo $t = 0$, podemos seguir un método de solución general que consiste en escribir la llamada ecuación maestra. La ecuación maestra es una ecuación de tipo pérdida-ganancia que gobierna la evolución de la probabilidad $p_k(t)$ de que haya k núcleos activos a tiempo $t \geq 0$ si había N activos a tiempo $t = 0$. Para construir la ecuación maestra, uno empieza por escribir $p_k(t + \Delta t)$ con $\Delta t \geq 0$ en términos de las probabilidades a tiempo t . Es decir, el objetivo es propagar las probabilidades hacia el futuro. Existen varios caminos independientes a través de los cuales puede haber k núcleos activos a tiempo $t + \Delta t$:

- Que haya k núcleos activos a tiempo t y que no decaiga ningún núcleo entre t y $t + \Delta t$.
- Que haya $k + 1$ núcleos activos a tiempo t y que decaiga un núcleo entre t y $t + \Delta t$.
- Que haya $k + 2$ núcleos activos a tiempo t y que decaigan dos núcleos entre t y $t + \Delta t$.
- etc.

Veremos que sólo importan los dos primeros casos. Formalmente,

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} p(k, t + \Delta t | k + i, t) p_{k+i}(t), \quad (17)$$

donde $p(k, t + \Delta t | k + i, t)$ es la probabilidad condicional de que haya k núcleos activos a tiempo $t + \Delta t$ si al comienzo del intervalo hay $k + i$ núcleos activos; es decir, la probabilidad de que decaigan i núcleos en un intervalo de tiempo Δt si al inicio del intervalo hay $k + i$ núcleos activos. Como los núcleos son independientes, esta probabilidad puede construirse como el producto de las probabilidades de que decaigan i núcleos por la probabilidad de que no decaigan k núcleos, teniendo en cuenta el número de formas en las que pueden elegirse los i núcleos que decaen de entre el conjunto de $k + i$ núcleos. La probabilidad de que un dado núcleo activo decaiga en el intervalo Δt es aproximadamente igual a $\lambda \Delta t$, mientras que la probabilidad de que no decaiga es aproximadamente igual a $1 - \lambda \Delta t$. Entonces,

$$p(k, t + \Delta t | k + i, t) \simeq \binom{k+i}{i} (\lambda \Delta t)^i (1 - \lambda \Delta t)^k. \quad (18)$$

Luego, escribiendo explícitamente los primeros términos de la serie (17),

$$\begin{aligned} p_k(t + \Delta t) \simeq & p_k(t)(1 - \lambda \Delta t)^k + (k + 1)p_{k+1}(t)\lambda \Delta t(1 - \lambda \Delta t)^k \\ & + p_{k+2}(t) \binom{k+2}{2} (\lambda \Delta t)^2 (1 - \lambda \Delta t)^k + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

A partir de aquí, reteniendo términos a lo sumo de orden Δt , resulta

$$\begin{aligned} p_k(t + \Delta t) &\simeq (1 - k\lambda\Delta t)p_k(t) + (k + 1)p_{k+1}(t)\lambda\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= p_k(t) + \lambda[(k + 1)p_{k+1}(t) - kp_k(t)]\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Formando el cociente incremental y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación maestra:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda[(k + 1)p_{k+1}(t) - kp_k(t)], \quad (21)$$

que es, en realidad, un sistema de ecuaciones diferenciales. Para $k < 0$, podemos extender de manera natural la definición de p_k , escribiendo $p_k = 0$. Es trivial entonces ver que las ecuaciones para $k < -1$ son consistentes, siempre y cuando la ecuación para $k = -1$ sea consistente, lo que en verdad sucede:

$$\frac{dp_{-1}}{dt} = \lambda p_{-1}. \quad (22)$$

Es evidente que esta ecuación es cierta si $p_{-1}(t) = 0$.

Lo primero que uno debe hacer luego de escribir una ecuación maestra es verificar la conservación de la probabilidad. La suma de las probabilidades debe ser igual a uno, por lo tanto

$$\sum_k \frac{dp_k(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_k p_k(t) = \frac{d}{dt} 1 = 0. \quad (23)$$

Así, dada una ecuación maestra, lo que hay que verificar es que

$$\sum_k \frac{dp_k(t)}{dt} = 0. \quad (24)$$

Si las condiciones iniciales son tales que $\sum_k p_k(0) = 1$, entonces la suma de las probabilidades será 1 para todo t . Volviendo a la Ec. (21) y sumando sobre *todo* k ,

$$\sum_k \frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \left[\sum_k (k + 1)p_{k+1}(t) - \sum_k kp_k(t) \right]. \quad (25)$$

Como las sumas recorren todos los enteros, podemos redefinir el índice de la suma en el primer término del miembro de la derecha, con lo que evidentemente queda

$$\sum_k \frac{dp_k(t)}{dt} = 0. \quad (26)$$

La utilidad de haber definido p_k para $k < 0$ es que los índices de las sumas recorren todos los enteros: podemos desplazar el índice de sumación sin preocuparnos por modificar los límites de las sumas, que serán siempre menos y más infinito.

El problema ahora consiste en resolver la ecuación maestra, sujeta a la condición inicial $p_N(0) = 1$. Una de las maneras más efectivas para resolver ecuaciones maestras es introducir la función generatriz

$$F(t, x) = \sum_k p_k(t) x^k. \quad (27)$$

Veremos que el sistema de ecuaciones diferenciales para $p_k(t)$ se traduce en una ecuación diferencial en derivadas parciales para $F(t, x)$. En efecto, multiplicando la Ec. (21) por x^k y sumando sobre todo k , queda

$$\sum_k \frac{dp_k(t)}{dt} x^k = \lambda \left[\sum_k (k+1) p_{k+1}(t) x^k - \sum_k k p_k(t) x^k \right]. \quad (28)$$

El primer término es la derivada parcial de $F(t, x)$ respecto de t . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_k (k+1) p_{k+1}(t) x^k &= \sum_k k p_k(t) x^{k-1} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \\ \sum_k k p_k(t) x^k &= x \sum_k k p_k(t) x^{k-1} = x \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (29)$$

Finalmente, la función generatriz satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \lambda(1-x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}. \quad (30)$$

Es más sencillo resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales que el sistema de ecuaciones (21). Una vez hallada la función generatriz, todo se reduce a escribirla como una serie de potencias en x . Los coeficientes de esa serie son las probabilidades $p_k(t)$.

Para resolver la ecuación diferencial que satisface la función generatriz puede ensayarse el método de separación de variables. Buscamos soluciones de la forma

$$f(t, x) = T(t)X(x). \quad (31)$$

Reemplazando en la Ec. (30) y dividiendo por $f(t, x)$, obtenemos

$$\frac{1}{\lambda} \frac{T'(t)}{T(t)} = (1-x) \frac{X'(x)}{X(x)}. \quad (32)$$

Si una función de t está igualada a una función de x , entonces esas dos funciones deben ser iguales a una constante:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{T'(t)}{T(t)} = (1-x) \frac{X'(x)}{X(x)} = -\alpha. \quad (33)$$

Esto quiere decir que las funciones T y X satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{T'}{T} = -\lambda\alpha, \quad \frac{X'}{X} = -\frac{\alpha}{1-x}. \quad (34)$$

Las soluciones son

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda\alpha t}, \quad X(x) = X_0 (1-x)^\alpha. \quad (35)$$

Tenemos entonces toda una familia de soluciones de la Ec. (30),

$$f(t, x) = c [e^{-\lambda t} (1-x)]^\alpha. \quad (36)$$

Debido a la linealidad de la ecuación original, cualquier combinación lineal de estas funciones será también solución. En particular, podemos elegir $\alpha = 0, 1, \dots$ y sumar sobre todo α , para construir una solución de la forma

$$F(t, x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha [e^{-\lambda t} (1-x)]^\alpha. \quad (37)$$

La libertad en la elección de los coeficientes c_α nos permite construir cualquier función f en la variable

$$u = e^{-\lambda t} (1-x) \quad (38)$$

que admita un desarrollo de Taylor. Es decir, hay toda una familia de soluciones de la Ec. (30) de la forma

$$F(t, x) = f[e^{-\lambda t} (1-x)], \quad (39)$$

donde f es, hasta cierto punto, arbitraria. Pero ahora podemos dar vuelta el argumento. Supongamos que tenemos una función $f(u)$, que sea apenas derivable, entonces es inmediato verificar que

$$f[e^{-\lambda t} (1-x)] \quad (40)$$

es solución de la Ec. (30). Uno podría haber llegado a este resultado por simple prueba y error. Un método alternativo para encontrar este tipo de soluciones es el *método de las características*. Lo pueden ver en el libro de Reichl.

Las condiciones iniciales del problema determinan la función f . Si inicialmente hay N núcleos activos, $p_k(0) = \delta_{k,N}$ y

$$F(0, x) = f(1-x) = \sum_k p_k(0) x^k = x^N, \quad (41)$$

que es lo mismo que decir que

$$f(x) = (1-x)^N. \quad (42)$$

En definitiva,

$$F(t, x) = [1 - e^{-\lambda t}(1 - x)]^N = (1 - e^{-\lambda t} + xe^{-\lambda t})^N. \quad (43)$$

Para calcular las probabilidades $p_k(t)$, debemos expandir F como una serie de potencias en x . En este caso es muy simple,

$$F(t, x) = \sum_k \binom{N}{k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{N-k} x^k. \quad (44)$$

De aquí leemos

$$p_k(t) = \binom{N}{k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{N-k}. \quad (45)$$

Noten que no hemos escrito los límites de las sumatorias tampoco en esta instancia, aunque sabemos que las sumas recorren los enteros k entre 0 y N . Da lo mismo que los límites de las sumas sean menos y más infinito. Los números binomiales son cero si $k < 0$ o si $N - k < 0$, de manera que las cosas funcionan igual si la suma recorre todos los enteros.

Retrospectivamente, podemos llegar a la expresión (45) de manera más directa: la probabilidad de que un núcleo activo a tiempo $t = 0$ continúe activo a tiempo t es

$$w(t) = e^{-\lambda t}. \quad (46)$$

Por complementariedad, la probabilidad de que haya decaído es

$$1 - w(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (47)$$

Si aún hay activos k núcleos, hay $\binom{N}{k}$ maneras de elegir qué núcleos no decayeron. Para cada elección, la probabilidad de que eso haya sucedido es

$$w(t)^k \times [1 - w(t)]^{N-k}. \quad (48)$$

Entonces, teniendo en cuenta que hay $\binom{N}{k}$ caminos que llevan al mismo resultado, la probabilidad de que haya k núcleos activos es

$$p_k(t) = \binom{N}{k} \times w(t)^k \times [1 - w(t)]^{N-k}, \quad (49)$$

que es el mismo resultado al que llegamos mediante el método de la función generatriz.

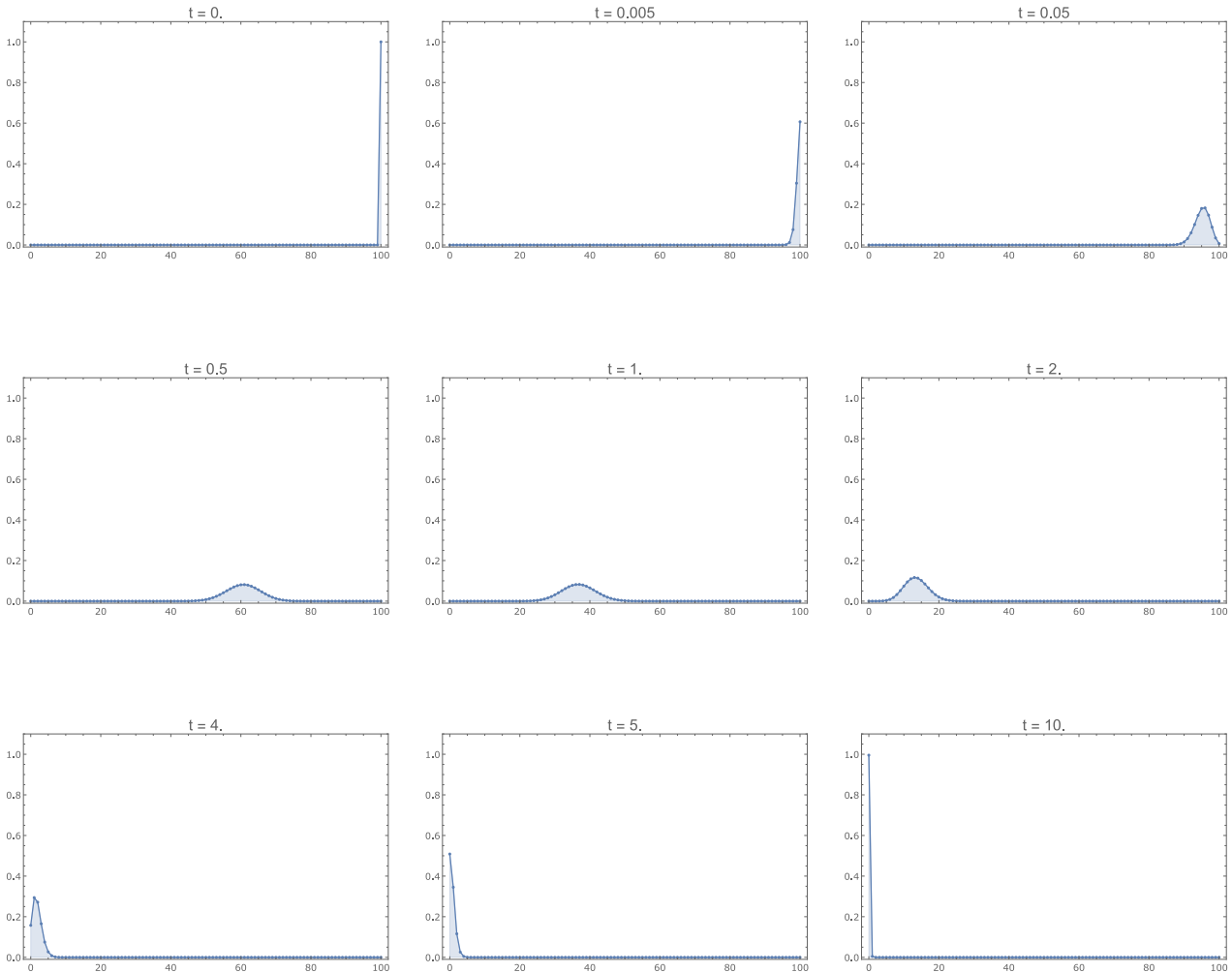
Usualmente, es complicado encontrar un argumento combinatorio que lleve de manera directa a la probabilidad buscada. El método de la función generatriz es más sistemático. Debido a que el problema del decaimiento radioactivo puede resolverse por los dos caminos, resulta un buen ejemplo para introducir el método de la función generatriz.

El tiempo de vida medio

Hemos encontrado que la probabilidad de que haya k núcleos activos a tiempo $t \geq 0$, si inicialmente hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$, está dada por la Ec. (45),

$$p_k(t) = \binom{N}{k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{N-k}. \quad (50)$$

Es decir, se trata de una distribución binomial. La evolución de $p_k(t)$ se muestra en la siguiente serie de figuras, cuando $N = 100$ y $\lambda = 1$. Aquí hay una animación.



El valor medio del número de núcleos activos a tiempo t es

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} w(t)^k [1 - w(t)]^{N-k}. \quad (51)$$

En general, para calcular la suma

$$S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k a^k b^{N-k}, \quad (52)$$

lo que se hace es reescribir S en términos de la derivada respecto de a ,

$$S = a \frac{d}{da} \left[\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k b^{N-k} \right]. \quad (53)$$

Pero ahora el término entre corchetes es simplemente la expansión del binomio,

$$S = a \frac{d}{da} (a + b)^N = N a (a + b)^{N-1}. \quad (54)$$

En nuestro caso, $a + b = w + (1 - w) = 1$, de modo que

$$\langle n(t) \rangle = N w(t) = N e^{-\lambda t}. \quad (55)$$

Existe una forma más directa de llegar a este resultado. Asignemos al núcleo i -ésimo una variable $n_i(t)$ que valga 1 si el núcleo está activo a tiempo t y cero si ya decayó. La suma de todos los $n_i(t)$ es igual al número de núcleos activos a tiempo t . El valor medio del número de núcleos activos a tiempo t será, entonces, igual a la suma de los valores medios de las variables $n_i(t)$. Pero esos valores medios son muy fáciles de calcular:

$$\langle n_i(t) \rangle = 0 \times [1 - w(t)] + 1 \times w(t) = w(t). \quad (56)$$

Luego,

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \langle n_i(t) \rangle = N w(t). \quad (57)$$

Hay todavía otra forma mucho más directa de calcular $\langle n(t) \rangle$ que ni siquiera requiere conocer $p_k(t)$. La ecuación maestra permite generar ecuaciones de evolución para los valores medios. La ecuación maestra era

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda [(k + 1)p_{k+1}(t) - k p_k(t)]. \quad (58)$$

Multiplicándola por k y sumando para todo k , resulta

$$\frac{d}{dt} \sum_k k p_k(t) = \lambda \left[\sum_k k(k + 1) p_{k+1}(t) - \sum_k k^2 p_k(t) \right]. \quad (59)$$

Desplazando en una unidad el índice de la primera sumatoria en el segundo miembro,

$$\frac{d}{dt} \sum_k k p_k(t) = \lambda \left[\sum_k (k - 1) k p_k(t) - \sum_k k^2 p_k(t) \right] = -\lambda \sum_k k p_k(t). \quad (60)$$

Pero, por definición,

$$\sum_k k p_k(t) = \langle n(t) \rangle. \quad (61)$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dt} \langle n(t) \rangle = -\lambda \langle n(t) \rangle. \quad (62)$$

Puesto que a tiempo $t = 0$ hay con certeza N núcleos, la condición inicial es $\langle n(0) \rangle = N$. Por lo tanto,

$$\langle n(t) \rangle = Ne^{-\lambda t}, \quad (63)$$

tal como obtuvimos anteriormente.

Volvamos a la última parte del problema. El tiempo de vida medio τ es el tiempo en el que el valor medio del número de núcleos activos decae a la mitad de su valor inicial. Queda definido a través de la relación

$$\langle n(\tau) \rangle = \frac{1}{2}N, \quad (64)$$

Luego,

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \log 2. \quad (65)$$

Una propiedad notable del tiempo de vida medio en el problema del decaimiento radioactivo es que τ no depende del número inicial de núcleos. Es natural que sea así, porque la evolución de cada núcleo es independiente de la de los demás. El tiempo de vida medio es característico de cada radioisótopo.

¿Cómo se compara el tiempo de vida medio con el valor medio del tiempo hasta que decaen la mitad de los núcleos? Este tiempo está dado por la Ec. (16),

$$T_{N/2} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2}N+1} \right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N \frac{1}{k}. \quad (66)$$

Podemos estimar esta suma reemplazándola por una integral,

$$\sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N \frac{1}{k} \simeq \int_{\frac{N}{2}+1}^N \frac{dk}{k} = \log \frac{2N}{N+2}. \quad (67)$$

Si $N \gg 1$,

$$\log \frac{2N}{N+2} \simeq \log 2. \quad (68)$$

Finalmente,

$$T_{N/2} \simeq \frac{1}{\lambda} \log 2 = \tau. \quad (69)$$

Es bueno que estos dos tiempos típicos coincidan, porque ambos son definiciones razonables de una escala de tiempo característica. Hubiera alcanzado con que los dos tiempos

fueran del mismo orden de magnitud. El resultado anterior es más fuerte: en el límite $N \gg 1$, son exactamente iguales.

Para obtener una estimación más precisa, notemos que

$$\sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{k}. \quad (70)$$

En términos de los números armónicos que introdujimos en la Ec. (14),

$$T_{N/2} = \frac{1}{\lambda} (H_N - H_{N/2}). \quad (71)$$

El comportamiento asintótico de los números armónicos para $n \gg 1$ está dado por la siguiente expresión

$$H_n \simeq \gamma + \frac{1}{2n} + \log n, \quad (72)$$

donde γ es la constante de Euler. Luego,

$$T_{N/2} \simeq \frac{1}{\lambda} \left(\log 2 - \frac{1}{2N} \right). \quad (73)$$

Finalmente, la diferencia entre τ y $T_{N/2}$ está dada de forma aproximada por

$$\lambda (\tau - T_{N/2}) \simeq \frac{1}{2N}. \quad (74)$$

Funciones generatrices por venir

Consideremos un sistema de N elementos con un espectro de energías discreto. Llamemos $\Omega(E, N)$ al número de estados con energía E . Han visto en la clase teórica, que la mecánica estadística postula la siguiente relación:

$$S(E, N) = k \log \Omega(E, N). \quad (75)$$

La función de partición en el ensamble canónico es la función generatriz de los números $\Omega(E, N)$,

$$Z_N(\beta) = \sum_E e^{-\beta E} \Omega(E, N). \quad (76)$$

La diferencia con la definición que vimos antes es que en lugar de multiplicar por x^E , estamos multiplicando por $e^{-\beta E}$. A su vez, la función de partición en el ensamble gran canónico es la función generatriz asociada a los números Z_N ,

$$\mathcal{Z}(\beta, z) = \sum_N z^N Z_N(\beta). \quad (77)$$

Lo que veremos es que para calcular Z_N no es necesario calcular $\Omega(E, N)$, y que para calcular \mathcal{Z} tampoco es necesario calcular Z_N . Por el contrario, suele suceder que la manera más práctica de calcular $\Omega(E, N)$ sea a partir de Z_N , y la manera más práctica de calcular Z_N sea a partir de \mathcal{Z} .