

Física Teórica 3 – primer cuatrimestre de 2024

Guía 4: Transporte

(Algunas integrales útiles figuran en la última página).

1. **Leyes de conservación.** Si una cantidad $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, asociada a cada partícula, se conserva en las colisiones binarias, es decir, si $\chi'_1 + \chi'_2 = \chi_1 + \chi_2$, entonces es posible deducir leyes de conservación para las soluciones de la ecuación de Boltzmann. La forma de estas leyes es la siguiente (Huang, §5.3):

$$\int d^3p \chi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0. \quad (1)$$

La ley de conservación más elemental es la del número de partículas; la función $\chi = 1$ lleva la cuenta del número de partículas antes y después de la colisión.

Si cada integral de las que aparecen en (1) se identifica con el valor medio o con la corriente de alguna de las variables macroscópicas, la forma final de la ley de conservación puede interpretarse como una ecuación de continuidad. Demostrar que para $\chi = 1$, $\chi = \mathbf{p}$ y $\chi = p^2/2m$ resultan las siguientes ecuaciones de continuidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (n m \mathbf{u}) + \nabla \cdot \Theta = n \langle \mathbf{F} \rangle, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_\epsilon = n \left\langle \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{F} \right\rangle, \quad (2)$$

donde n es la densidad, \mathbf{u} es la velocidad media y

$$\Theta_{ij} = \int d^3p \frac{p_i p_j}{m} f, \quad \epsilon = \int d^3p \frac{p^2}{2m} f, \quad \mathbf{j}_\epsilon = \int d^3p \frac{p^2}{2m} \frac{\mathbf{p}}{m} f. \quad (3)$$

Interpretar físicamente cada término. *Ayudas para los cálculos:* i) la derivadas respecto del tiempo y de la posición pueden sacarse fuera de la integral; ii) el término con la fuerza \mathbf{F} puede integrarse por partes; iii) suponga que la fuerza externa cumple $\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = 0$; en particular demuestre que esta condición incluye el caso de la fuerza de Lorentz.

2. **Aproximaciones de equilibrio local y de tiempo de relajación.** La aproximación de equilibrio local corresponde a asumir que la función de distribución del gas es una distribución de Maxwell–Boltzmann local más una corrección δf ,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{[2\pi m k T(\mathbf{r}, t)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{|\mathbf{p} - m\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|^2}{2m k T(\mathbf{r}, t)} \right] + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (4)$$

con tres condiciones suplementarias que fijan los valores de n , \mathbf{u} y T ; a saber,

$$\int d^3p \delta f = 0, \quad \int d^3p \mathbf{p} \delta f = 0, \quad \int d^3p \frac{p^2}{2m} \delta f = 0. \quad (5)$$

- a) Calcular la corriente de partículas \mathbf{j} , el tensor de esfuerzos Θ_{ij} y la densidad de flujo de energía \mathbf{j}_ϵ asociados a la aproximación de más bajo orden $f \approx f_0$.

- b) Demostrar que las tres condiciones (5) significan que las funciones n y \mathbf{u} que aparecen en f_0 son la densidad y la velocidad media exactas, y mostrar que la densidad de energía cinética exacta es

$$\epsilon = \frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}n\mathbf{u}^2, \quad (6)$$

lo que define T en general.

El integrando en el término de colisiones de la ecuación de Boltzmann es cuadrático en f ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} = & \int d^3p'_1 d^3p'_2 d^3p_2 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) \\ & \times |T_{fi}|^2 (f'_2 f'_1 - f_2 f_1). \end{aligned} \quad (7)$$

- c) Demostrar por cálculo directo que cualquier distribución de Maxwell–Boltzmann local, con funciones T , \mathbf{u} y n arbitrarias, reemplazada en el término de colisiones integra a cero.

Antes hemos definido $f = f_0 + \delta f$, así que la combinación de funciones f que aparece en el término de colisiones (7) puede escribirse como

$$f'_2 f'_1 - f_2 f_1 = (f'_{02} f'_{01} - f_{02} f_{01}) + \delta f'_2 f'_{01} + f'_{02} \delta f'_1 - \delta f_2 f_{01} - f_{02} \delta f_1 + \delta f'_1 \delta f'_2 - \delta f_2 \delta f_1. \quad (8)$$

El ítem (c) muestra que el término de orden cero no contribuye a la integral de colisiones. De los otros términos, a más bajo orden se pueden omitir los que son cuadráticos en δf , conservando sólo los que son lineales. De esta forma puede estimarse que $(\partial f/\partial t)_{\text{col}} \sim \delta f$. Esto motiva la aproximación de tiempo de relajación:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} \approx -\frac{\delta f}{\tau}, \quad (9)$$

donde $\tau(\mathbf{r}, t)$ es un tiempo microscópico característico, mucho menor que la escala de evolución macroscópica del sistema. Finalmente, la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -\frac{\delta f}{\tau}. \quad (10)$$

- d) Mostrar que, a más bajo orden en τ , puede escribirse

$$\delta f = -\tau \left[\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_0 \right]. \quad (11)$$

No suele ser necesario calcular δf de manera explícita, debido a que lo que importa son las corrientes y densidades, es decir, integrales de δf sobre el impulso. Al reemplazar la expresión (11) en estas integrales ocurren dos cosas: i) la derivada respecto del tiempo y el gradiente respecto a la posición pueden sacarse fuera de las integrales (evitando tener que calcular los muchos términos de las derivadas de una función que depende

de \mathbf{r} y t a través de la composición de muchas otras funciones), ii) el gradiente respecto del impulso puede integrarse por partes (trasladando el peso de las derivadas a simples funciones del impulso, en vez de la gaussiana).

e) Suponga que el régimen es estacionario y que no hay fuerzas externas.

i) Demostrar que las tres condiciones (5) implican a orden cero en τ

$$\nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla(nkT) = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{5}{2}kT + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 \right) = 0, \quad (12)$$

y que son equivalentes, vía el ítem (a), a la conservación exacta del número de partículas y a la conservación a orden más bajo del impulso y de la energía, respectivamente. Estas igualdades se usan en los ítems que siguen.

ii) Calcular el tensor de flujo de impulso Θ_{ij} hasta orden τ , es decir, usando la distribución (4) y la corrección δf dada por (11), con $\partial f_0/\partial t = 0$ y $\mathbf{F} = 0$. El resultado al que se debe llegar es

$$\Theta_{ij} = n \left[kT\delta_{ij} + m\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j \right] - \tau n \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)(kT) \delta_{ij} + kT(\partial_i\mathbf{u}_j + \partial_j\mathbf{u}_i) \right]. \quad (13)$$

El factor que acompaña al término $(-\partial_i\mathbf{u}_j - \partial_j\mathbf{u}_i)$ es la viscosidad, $\eta = \tau nkT$.

f) Bajo las mismas condiciones que antes, pero suponiendo además que el fluido está en reposo, calcular \mathbf{j}_ϵ hasta orden τ . El resultado al que se debe llegar es

$$\mathbf{j}_\epsilon = - \left(\frac{5\tau nk^2T}{2m} \right) \nabla T. \quad (14)$$

El coeficiente que multiplica a $(-\nabla T)$ es la conductividad térmica κ .

g) Hallar el cociente $\kappa/(C_V\eta)$, donde C_V es la capacidad calorífica por unidad de masa a volumen constante, y verificar que es una constante numérica universal. Al respecto ver Dalvit *et al.*, pp. 261–262; Huang, 2da. ed., p. 108.

3. La situación general del problema es la siguiente: un gas está en reposo, en régimen estacionario, sin fuerzas externas y con una temperatura y una densidad levemente inhomogéneas. Usando la aproximación de equilibrio local y de tiempo de relajación, encontrar las ecuaciones que determinan la densidad de partículas y la temperatura. Deberá proponer una forma explícita para τ , basándose en el modelo más simple de colisiones que pueda imaginar. En particular, considere la situación en la que el gas está entre dos placas infinitas paralelas separadas una distancia L . La temperatura de una de las placas es T_0 y la de la otra placa es T_1 . Sobre la primera placa la densidad es n_0 . Encontrar T y n como funciones de la posición. Comparar con la solución aproximada que resulta de la simple interpolación lineal.

Algunas integrales útiles

Si f es la distribución de Maxwell–Boltzmann centrada en $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u} = 0$,

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2m\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mkT}\right),$$

entonces:

$$\int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = n,$$

$$\int d^3\mathbf{p} p_i p_j f(\mathbf{p}) = \delta_{ij} mnkT,$$

$$\int d^3\mathbf{p} p_i p_j p_k p_l f(\mathbf{p}) = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) n(mkT)^2,$$

$$\int d^3\mathbf{p} p^s f(\mathbf{p}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2mkT)^{s/2} n \Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right).$$

Notar que la integral de un número impar de componentes del impulso siempre es cero, por simetría. Si se trata de hacer integrales con $m\mathbf{u} \neq 0$, es decir, con la gaussiana no centrada de la Ec. (4), hay que hacer el cambio de variable $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + m\mathbf{u}$, que centra la gaussiana pero desplaza las componentes del impulso que se están promediando, lo que da lugar a integrales de órdenes más bajos.