Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2024

Guía 5: masa de Chandrasekhar*

■ **Problema 7**. Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio a una temperatura del orden de 10^7 K y a una densidad de unos 10^{10} kg/m^3. A esta temperatura, los átomos de helio están completamente ionizados. Cada núcleo de helio tiene una masa de aproximadamente $4m_\mathrm{p}$, donde m_p es la masa del protón.

a) Mostrar que puede considerarse que el gas de electrones está a temperatura cero, pero es relativista.

b) Asumiendo que la estrella es homogénea, su energía potencial es $E_g = -3GM^2/5R$, donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio de la estrella. Calcular su energía cinética E_e en función de M y de R, despreciando la contribución de los núcleos y aproximando la relación de dispersión de los electrones a primer orden en m^2,

$$\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4} \simeq pc + \frac{m^2c^3}{2p}.$$

c) En equilibrio, el radio toma el valor que minimiza la energía (¿por qué?). Mostrar que existe una masa límite M_C tal que, para $M > M_\mathrm{C}$, no hay ningún radio de equilibrio. Esa masa se conoce como el límite de Chandrasekhar. Calcular M_C en unidades de la masa solar, $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg.

d) Mostrar que no existiría una masa límite si el gas de electrones fuera no relativista.

■ **Solución**. Lo primero que queremos mostrar, es que la temperatura de Fermi del gas de electrones es mucho mayor que la temperatura de la estrella, de modo que los electrones pueden ser tratados, en primera aproximación, como un gas ideal de Fermi a temperatura cero.

La masa de la estrella puede aproximarse por la masa de los núcleos de helio. Si la densidad de la estrella es ρ, el número de núcleos de helio por unidad de volumen será entonces

$$n_\mathrm{He} = \frac{\rho}{m_\mathrm{He}}, \tag{1}$$

donde m_He es la masa de los núcleos de helio, aproximadamente igual a cuatro veces la masa del protón,

$$m_\mathrm{He} = 4m_\mathrm{p}. \tag{2}$$

En casi todas las fórmulas que escribiremos, el signo igual deberá ser entendido como un aproximadamente igual. Puesto que por cada núcleo de helio hay dos electrones, el número

*zanellaj@df.uba.ar

de electrones por unidad de volumen será

$$n = 2n_{\mathrm{He}} = \frac{\rho}{2m_p}. \tag{3}$$

El impulso de Fermi de los electrones está dado por

$$\frac{N}{V} = n = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^{p_F} dp\; p^2 = \frac{4\pi g}{3h^3}p_F^3. \tag{4}$$

donde $g = 2$ es la degeneración de espín. Despejando,

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} h. \tag{5}$$

Reemplazando los datos del problema, resulta

$$p_F = 4{,}7 \times 10^{-22}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}. \tag{6}$$

Conviene escribir esto en electronvolts,

$$\frac{p_F c}{e} \approx 0{,}88\ \mathrm{MeV}. \tag{7}$$

Teniendo en cuenta que la masa de los electrones es de unos 0,5 MeV, para calcular la energía de Fermi tendremos que usar la energía relativista

$$\epsilon_F = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_F c)^2} \approx 1\ \mathrm{MeV}. \tag{8}$$

Esto da una temperatura de Fermi

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k} \approx 1{,}2 \times 10^{10}\ \mathrm{K}, \tag{9}$$

mucho mayor que la temperatura de la estrella, que es del orden de los 10^7 K. En primera aproximación, podremos tratar al gas de electrones como un gas ideal de Fermi a temperatura cero. Lo que no podremos hacer es tratarlo como un gas de partículas no relativistas. Tampoco podemos tratarlo como un gas de partículas ultrarrelativistas. El enunciado sugiere usar como aproximación

$$\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \simeq pc + \frac{m^2c^3}{2p}. \tag{10}$$

Usando esta aproximación, la energía del gas de electrones es

$$E_e = \frac{4\pi g V}{h^3}\int_0^{p_F} dp\; p^2 \left(pc + \frac{m^2c^3}{2p}\right) = \frac{\pi g V}{h^3}p_F^3\left(p_F c + \frac{m^2c^3}{p_F}\right). \tag{11}$$

Comparando con la Ec. (4), vemos que

$$E_e = \frac{3}{4}N\left(p_F c + \frac{m^2c^3}{p_F}\right), \tag{12}$$

donde N es el número total de electrones. Una vez fijada la masa de la estrella, el número de electrones queda determinado. Como el impulso de Fermi es función de la densidad, fijado el número de electrones, p_F y, por lo tanto, E_e, serán una funciones del radio de la estrella únicamente.

La energía total de la estrella es aproximadamente igual a la energía potencial gravitatoria más la energía cinética del gas de electrones,

$$E = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} + E_e. \tag{13}$$

Ya notamos que E_e sólo depende del radio de la estrella, de manera que el único parámetro libre en esta ecuación es R. Debido a que existe una relación uno a uno entre el radio de la estrella y el impulso de Fermi, conviene elegir p_F como variable independiente. Mediante la Ec. (4), podemos escribir

$$V = \frac{3Nh^3}{8\pi p_F^3} \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}\,\pi}\right)^{2/3} N^{1/3}\frac{h}{p_F}. \tag{14}$$

Así,

$$E(p_F) = -\frac{3}{5}\left(\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{3}\right)^{2/3}\frac{GM^2}{hN^{1/3}}p_F + \frac{3}{4}N\left(p_F c + \frac{m^2c^3}{p_F}\right). \tag{15}$$

Introduciendo la variable adimensional

$$x = \frac{p_F}{mc}, \tag{16}$$

y teniendo en cuenta que $N = M/2m_p$,

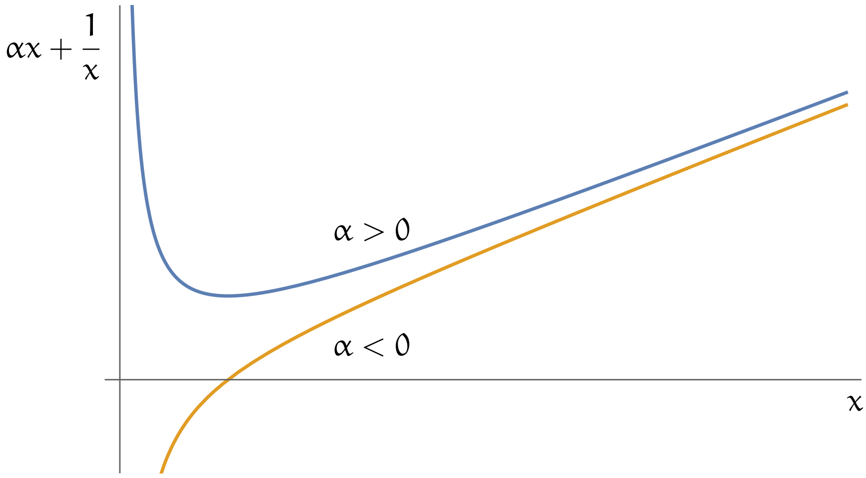
$$\frac{4}{3N}\frac{E(x)}{mc^2} = \left[1 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{128\pi}{15}\right)^{2/3}\frac{Gm_p^{4/3}M^{2/3}}{hc}\right]x + \frac{1}{x}. \tag{17}$$

Dependiendo del signo del coeficiente que multiplica a x, esta función puede o no tener un mínimo para $x > 0$, como muestra la figura. Si el coeficiente es positivo, la función tiene un mínimo en

$$x = \left[1 - \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{128\pi}{15}\right)^{2/3}\frac{Gm_p^{4/3}M^{2/3}}{hc}\right]^{-1/2}. \tag{18}$$

La masa crítica es el valor de M tal que la expresión dentro del corchete es nula,

$$M_C = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{15}{128\pi}\left(\frac{hc}{Gm_p^2}\right)^{3/2} m_p. \tag{19}$$



En términos de la masa la masa solar,

$$\frac{M_C}{M_\odot} \approx 1{,}7, \tag{20}$$

lo que no está tan lejos del valor calculado por medios más precisos, que es

$$\frac{M_C}{M_\odot} \approx 1{,}44. \tag{21}$$

Podría pensarse que para calcular un valor más preciso de M_C es necesario usar la expresión relativista exacta para la energía de los electrones,

$$\epsilon(p) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \tag{22}$$

En realidad eso no hace ninguna diferencia. Queda como ejercicio demostrar esta afirmación. Pero la pregunta más importante que deberían hacerse es por qué el equilibrio está determinado por el mínimo de la energía total.