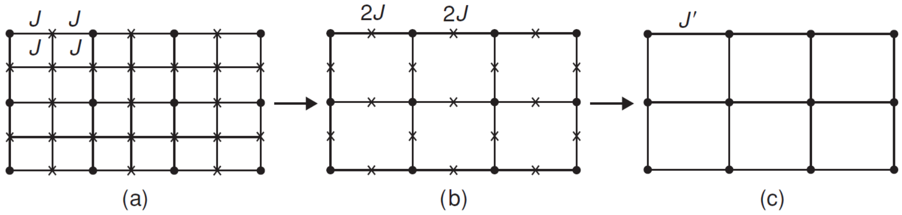
Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023

Guía 9: *Grupo de renormalización. Transformación de Migdal–Kadanoff.*

■ **Problema 10**. (Pathria 3ra. ed., problema 14.5). Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal–Kadanoff, que se muestra en la figura.



La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se elimina, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplamiento de los enlaces restantes se cambia de J a 2J. Eso lleva de la figura (a) a la figura (b). En segundo lugar, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplamiento J'.

a) Muestre que la relación de recurrencia para un modelo de Ising de espín 1/2 en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = \frac{2x^2}{1+x^4}, \tag{1}$$

donde $x = e^{-2K}$, con $K = \beta J$. Hay dos puntos fijos triviales, $x = 0$ y $x = 1$. Muestre que hay un punto fijo no trivial dado por

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \approx 0{,}5437. \tag{2}$$

Compare con el valor exacto de x_c.

b) Linealizando alrededor de este punto fijo, muestre que el autovalor λ de esta transformación es

$$\lambda = \frac{2(1-x^*)}{x^*} \approx 1{,}6786, \tag{3}$$

y por lo tanto $\nu = \log 2/\log\lambda \approx 1{,}338$. Comparar con el valor exacto.

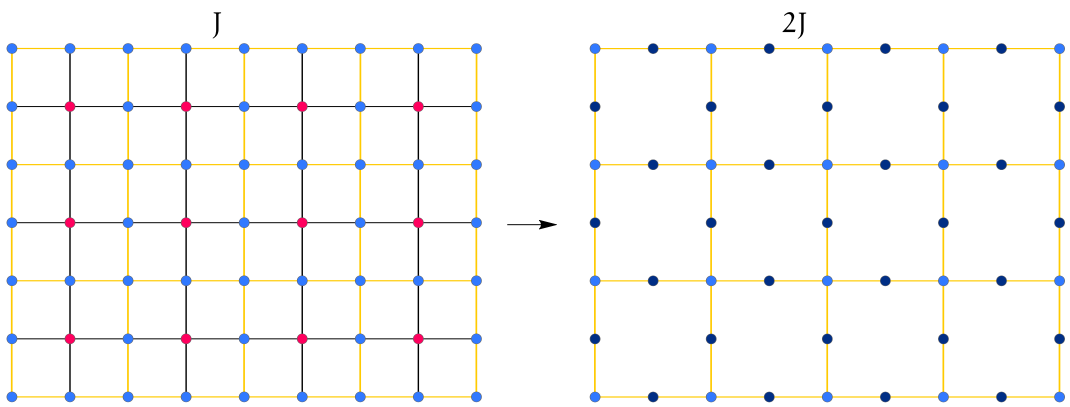
■ **Solución**. La aplicación del esquema de decimación para las redes de Ising en $d > 1$ dimensiones es tan complicada, sobre todo el control de las aproximaciones, que la gente ha ideado métodos heurísticos, en donde el control de las aproximaciones es dejado manifiestamente de lado. Este problema trata acerca de uno de esos métodos. Es la transformación de Migdal–Kadanoff para la red de Ising cuadrada. La idea esencial es la deformación de la red, mediante el movimiento de los enlaces, de manera que resulte una red en donde sea posible llevar a cabo la decimación. Sabemos que la aplicación rigurosa del grupo de renormalización requiere considerar acoplamientos generales entre todos los grupos de espines. En la transformación de Migdal–Kadanoff, hay un sólo acoplamiento: el acoplamiento de primeros vecinos. De manera que hay una sola ecuación de grupo de renormalización. Incluir un campo externo no debería ser complicado.

Si $K = \beta J$, la probabilidad canónica de la red cuadrada sin campo externo es

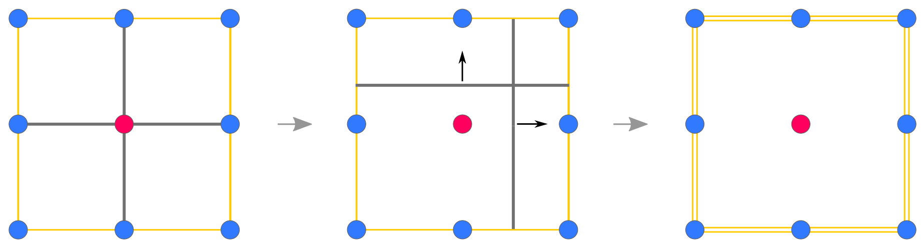
$$P(\{s_{ij}\}) = \frac{1}{Z} \prod_{i,j} e^{K s_{ij} s_{i+1,j}} \, e^{K s_{ij} s_{ij+1}}. \tag{4}$$

Asumiendo condiciones de contorno periódicas, elegimos arbitrariamente la posición $(0,0)$ de la red y numeramos a los espines de acuerdo a sus coordenadas respecto a ese punto, con i y j tomando valores enteros entre $-\frac{1}{2}N+1$ y $\frac{1}{2}N$. El número N es par y arbitrariamente grande. En total hay N^2 espines. Para no contar más de una vez cada interacción, a cada espín le asociamos un par de interacciones: la interacción hacia la derecha y la interacción hacia arriba. Esta asociación tiene en cuenta todas las interacciones una sola vez.

El primer paso de la transformación elimina un cuarto de los espines de la red y, con ellos, la mitad de los enlaces. La red se divide en una cuadrícula de dos por dos y se elimina el espín central de cada cuadro. La figura sólo muestra, por supuesto, una pequeña región de la red. Los espines en rojo se eliminan y quedan dos familias de espines sobrevivientes.



La eliminación de los espines centrales es compensada por una duplicación de la constante de acoplamiento, $J \to 2J$. Esto parece muy arbitrario. En la formulación original de la transformación de Migdal–Kadanoff, en lugar de pensar en términos de una eliminación de los espines, se habla de *trasladar* los enlaces, como en la figura siguiente.



Existe una justificación para esto. Si la entendiera verdaderamente, trataría de explicarla aquí. Pueden consultar los papers de Kadanoff, Phys. Rev. Lett. **34** (1975), 1005 y Ann. Phys. **100** (1976), 359. Un argumento que hace plausible esta sustitución de los enlaces empieza por considerar el estado del sistema a $T = 0$. En este estado, todos los espines están alineados. El número total de enlaces es

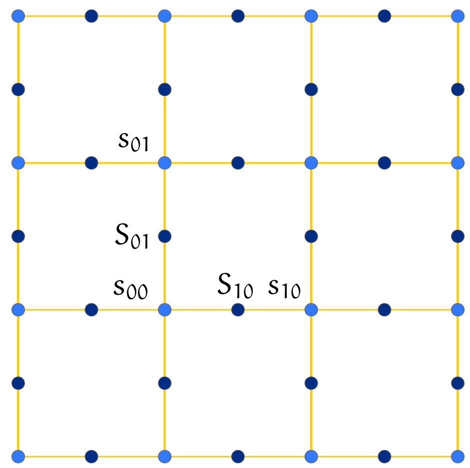
$$\tfrac{1}{2} \times 4N^2 = 2N^2. \tag{5}$$

Por lo tanto, la energía del sistema es $-2N^2 J$. Si movemos los enlaces como en la figura anterior, cada cuatro espines estamos eliminando cuatro enlaces. (Hay un espín rojo por cada cuatro espines). El número final de enlaces será

$$2N^2 - 4\frac{N^2}{4} = N^2. \tag{6}$$

Si imponemos la condición de que la energía del estado sea la misma luego de mover los enlaces, entonces la constante de acoplamiento debe duplicarse. Sobre bases teóricas más firmes, la aproximación de Migdal–Kadanoff extrapola esta prescripción para cualquier temperatura.

En definitiva: quedan dos clases de espines, los que tienen cuatro vecinos y los que tienen dos. A los que tienen cuatro vecinos los numeramos como s_{ij}, y a los que tienen dos vecinos como S_{ij}. Notar que este nuevo conjunto de espines s_{ij} no es el conjunto inicial, aunque los llamamos con el mismo símbolo. Suele hablarse de una red *decorada*. La red propiamente dicha está formada por los espines s_{ij}; los espines S_{ij} son la decoración. En la figura se han marcado cinco espines, numerados según sus coordenadas en la red.



La probabilidad canónica de esta nueva red será

$$P(\{s_{ij}\},\{S_{ij}\}) = \frac{1}{Z'}\prod_{i,j} \exp\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i+1,j})\,S_{i+1,j}\Big]\ \exp\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i,j+1})\,S_{i,j+1}\Big]. \tag{7}$$

La manera de pensar esta ecuación es la siguiente: a cada espín s_{ij} le corresponden dos segundos vecinos, $s_{i+1,j}$ y $s_{i,j+1}$, y dos primeros vecinos $S_{i+1,j}$ y $S_{i,j+1}$. Si recorremos todos los índices (i, j), teniendo en cuenta los acoplamientos

$$s_{ij} \leftrightarrow S_{i+1,j}, \qquad s_{ij} \leftrightarrow S_{i,j+1}, \qquad S_{i+1,j} \leftrightarrow s_{i+1,j}, \qquad S_{i,j+1} \leftrightarrow s_{i,j+1}, \tag{8}$$

estaremos contando una sola vez cada acoplamiento. Es la misma idea de antes: a cada espín s_{ij} le asociamos un par de acoplamientos hacia la derecha y un par de acoplamientos hacia arriba. Cada acoplamiento aparecerá una sola vez en la Ec. (7).

Ahora eliminamos de la descripción a los espines S_{ij}, marginalizando la probabilidad,

$$P(\{s_{ij}\}) = \sum_{\{S_{ij}\}} P(\{s_{ij}\}, \{S_{ij}\}). \tag{9}$$

Como cada espín S_{ij} aparece en un sólo término (i, j) de la productoria (7), resulta

$$\begin{aligned} P(\{s_{ij}\}) &= \frac{1}{Z'} \prod_{i,j} \left\{ \sum_{S_{i+1,j}=\pm 1} \exp\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i+1,j})\,S_{i+1,j}\Big] \right\} \left\{ \sum_{S_{i,j+1}=\pm 1} \exp\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i,j+1})\,S_{i,j+1}\Big] \right\} \\ &= \frac{1}{Z'} \prod_{i,j} 4 \cosh\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i+1,j})\Big] \cosh\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i,j+1})\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Esto sólo puede llevarse a cabo porque antes eliminamos la mitad de los enlaces. Hay que comparar esta expresión con la probabilidad original, dada por la Ec. (4),

$$P(\{s_{ij}\}) = \frac{1}{Z} \prod_{i,j} e^{K s_{ij} s_{i+1,j}}\, e^{K s_{ij} s_{i,j+1}}. \tag{11}$$

Si pudiéramos hacer la identificación

$$2 \cosh\Big[2K\,(s_{ij} + s_{i+1,j})\Big] = c\, e^{K' s_{ij} s_{i+1,j}}, \tag{12}$$

entonces la probabilidad marginal tendrá la misma forma que la probabilidad conjunta original. Reemplazando los cuatro valores posibles de los espines en la expresión anterior, encontramos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$e^{4K} + e^{-4K} = c\, e^{K'}, \qquad 2 = c\, e^{-K'}. \tag{13}$$

De aquí resulta

$$e^{2K'} = \frac{e^{4K} + e^{-4K}}{2}. \tag{14}$$

Definiendo $x = e^{-2K}$, la transformación en términos de x se escribe como

$$x' = \frac{2x^2}{1 + x^4}. \tag{15}$$

En conclusión, la transformación es cerrada respecto de la familia de hamiltonianos con interacciones a primeros vecinos. No es necesario introducir más tipos de acoplamientos.

■ Puntos fijos

Para encontrar los puntos fijos de la transformación, hay que resolver la ecuación

$$x = \frac{2x^2}{1+x^4}. \tag{16}$$

Hay un punto fijo evidente, que es $x = 0$. Esto corresponde a $T = 0$, o acoplamiento infinito. El sistema estará con probabilidad uno en el estado fundamental, con todos sus espines alineados. La función de correlación,

$$g(i,j;k,l) = \langle (s_{ij} - \bar{s})(s_{kl} - \bar{s}) \rangle \sim e^{-\sqrt{(i-k)^2+(j-l)^2}/\xi} \tag{17}$$

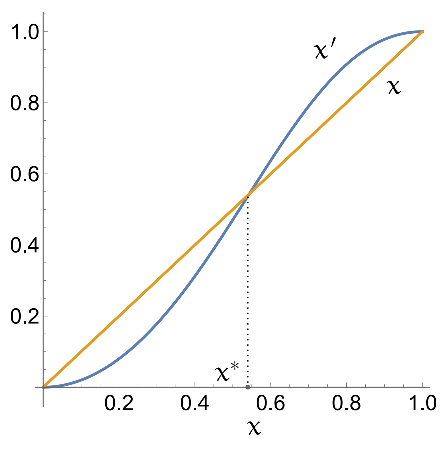
va a ser igual a cero. Eso implica una longitud de correlación ξ también nula, lo que puede resultar un poco antiintuitivo, ya que uno esperaría una correlación de alcance infinito. La cuestión es que la función de correlación no mide la correlación entre espines, sino entre sus fluctuaciones. La correlación entre espines es $\bar{s}^2$, constante.

Si $x \neq 0$, la ecuación para los puntos fijos es

$$x^4 + 1 = 2x. \tag{18}$$

Por simple inspección, $x = 1$ es otro punto fijo. Esto corresponde a acoplamiento cero, o temperatura infinita. En esos límites esperamos una longitud de correlación igual a cero. En resumen: tanto $x = 0$ como $x = 1$ son puntos fijos triviales.

Tenemos los medios, así que grafiquemos la Ec. (16).



Nuestro objetivo es encontrar el punto fijo no trivial que, según la figura, vale aproximadamente $\frac{1}{2}$. Si intentamos el método iterativo directo, rápidamente vemos nos conduce o bien al punto fijo $x = 0$ o bien al punto fijo $x = 1$. Podemos reducir en uno el grado de la Ec. (18), a partir del hecho de que $x = 1$ es una solución. Escribiendo

$$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2 = (1-x)^2(x+1)^2 + 2x^2, \tag{19}$$

la Ec. (18) se lee como

$$(1-x)^2(x+1)^2 = 2x(1-x). \tag{20}$$

Como estamos buscando la solución con $x \neq 1$, los factores $1-x$ pueden cancelarse,

$$(1-x)(x+1)^2 = 2x. \tag{21}$$

Escrita por extenso, la cúbica que resulta es

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 = 0. \tag{22}$$

También en este caso falla la solución iterativa. Esto está indicando que el punto fijo x^* es inestable. En cambio, el método de Newton rápidamente converge a la solución. A partir de un punto tentativo inicial x_0, cercano a x^*, la relación de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} \tag{23}$$

genera aproximaciones sucesivas de x^*. Con $x_0 = \frac{1}{2}$,

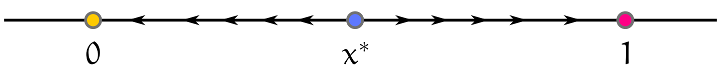
$$x_1 \approx 0{,}545\,455, \qquad x_2 \approx 0{,}543\,692, \qquad x_3 \approx 0{,}543\,689. \tag{24}$$

Hasta esta precisión, más iteraciones no modifican el resultado. Usando un programa de cálculo simbólico, o las fórmulas explícitas para la resolvente de la cúbica, podemos calcular el valor exacto:

$$x^* = \frac{1}{3}\left[\left(17+3\sqrt{33}\right)^{1/3} - 1 - \frac{2}{\left(17+3\sqrt{33}\right)^{1/3}}\right]. \tag{25}$$

El valor para la solución exacta del modelo de Ising es $x^* = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$.

El espacio de constantes de acoplamiento en este caso tiene dimensión igual a uno. No es difícil demostrar que los puntos fijos $x = 0$ y $x = 1$ son estables. El flujo del grupo de renormalización es como el que muestra la figura.



■ Sección de conocimientos perdidos

En el enunciado, la solución (25) está escrita en términos de funciones hiperbólicas, lo que resulta por demás misterioso. En verdad, es posible escribir las raíces de la cúbica en esa forma. Lo primero que hay que hacer es eliminar el término cuadrático con un cambio de variables de la forma $x = y + u$. Tenemos

$$f(y+u) = y^3 + (3u+1)y^2 + (3u^2+2u+1)y + u^3 + u^2 + u - 1. \tag{26}$$

Eligiendo $u = -\frac{1}{3}$, queda la ecuación

$$y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{34}{27} = 0. \tag{27}$$

Esta ecuación es de la forma

$$y^3 + ay - b = 0. \tag{28}$$

La estrategia para resolverla es escribir $y = \nu \sinh z$, para aprovechar la identidad

$$\sinh^3 z + \frac{3}{4}\sinh z - \frac{1}{4}\sinh 3z = 0. \tag{29}$$

Entonces, haciendo el reemplazo, queda

$$\nu^3 \sinh^3 z + a\nu \sinh z - b = 0. \tag{30}$$

Dividiendo por ν^3 y eligiendo

$$\nu = \sqrt{\frac{4a}{3}}, \tag{31}$$

la ecuación se reduce a

$$\sinh^3 z + \frac{3}{4}\sinh z - \left(\frac{3}{4a}\right)^{3/2} b = 0. \tag{32}$$

La comparación con la Ec. (29) implica

$$\sinh 3z = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{3/2} b. \tag{33}$$

Es decir,

$$z = \frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{3/2} b\right]. \tag{34}$$

Puesto que $y = \nu \sinh z$ y $x = y + u$, es

$$x^* = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4a}{3}}\sinh\left\{\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{3/2} b\right]\right\}. \tag{35}$$

Sólo falta reemplazar a y b,

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\}. \tag{36}$$

Esta es la expresión que figura en el enunciado.

Puede ser que se estén preguntando dónde están las otras dos raíces de la cúbica. Están en la Ec. (33). Recuerden que la función arcsinh es multivaluada:

$$\operatorname{arcsinh} x = \operatorname{Log}\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right) + 2\pi n i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{37}$$

Al escribir la solución (34), elegimos la solución real, que es la que corresponde a tomar

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{38}$$

■ **Exponentes críticos**

Escribiendo $x = x^* + \delta x$, la transformación linealizada alrededor de x^* es

$$\delta x' = f'(x^*)\delta x, \tag{39}$$

donde

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}. \tag{40}$$

Feynman presenta un método práctico para calcular derivadas. La idea es muy sencilla: si $f(x) = F(x)G(x)\ldots$, entonces

$$f'(x) = \frac{f(x)}{F(x)}F'(x) + \frac{f(x)}{G(x)}G'(x) + \ldots \tag{41}$$

Así, en el caso que estamos considerando,

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} - f(x)\frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{2f(x)}{x} - 2xf(x)^2. \tag{42}$$

Pero, en el punto fijo,

$$f(x^*) = x^*, \tag{43}$$

de modo que

$$\lambda \equiv f'(x^*) = 2\left(1 - x^{*3}\right) \approx 1{,}6786. \tag{44}$$

Debido a que x^* satisface la ecuación

$$x^{*3} + x^{*2} + x^* - 1 = 0, \tag{45}$$

hay muchas maneras alternativas de escribir λ. Por ejemplo,

$$1 - x^{*3} = x^*(1+x^*), \tag{46}$$

entonces,

$$\lambda = 2x^*(1+x^*). \tag{47}$$

También es cierto que

$$x^{*2}(x^* + 1) = 1 - x^*, \tag{48}$$

y, así,

$$\lambda = \frac{2(1 - x^*)}{x^*}, \tag{49}$$

que es la expresión que figura en el enunciado del problema.

En el punto crítico, $\delta x = 0$ y $T = T_c$. Cerca del punto crítico

$$|\delta x| \ll 1 \tag{50}$$

y

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \sim \delta x. \tag{51}$$

Lo importante es que t tiene el mismo comportamiento que δx frente a la transformación linealizada,

$$t^{(n)} = \lambda^n t^{(0)} = \lambda^n t. \tag{52}$$

Definimos la función $\xi(t)$ como la longitud de correlación en unidades de la longitud de la celda fundamental de la red. La longitud de la celda fundamental depende del nivel de descripción. En la red original, esa longitud es L. En la red decimada, esa longitud es $2L$. Como la longitud física de correlación tiene que ser independiente del nivel de descripción, si t' es la temperatura reducida de la red decimada, entonces

$$L\xi(t) = 2L\xi(t'). \tag{53}$$

Cuando aplicamos la transformación linealizada,

$$\xi(t) \simeq 2\xi(\lambda t) \simeq \ldots \simeq 2^n \xi(\lambda^n t)\,. \tag{54}$$

El signo de aproximación tiene en cuenta que estamos usando la versión linealizada de la transformación. Las ecuaciones funcionales de la forma

$$g(x) = a g(bx)\,, \tag{55}$$

como la Ec. (54), con a y b mayores que cero, tienen por solución la familia de funciones

$$G(x) = F\left(\frac{\log x}{\log b}\right) x^{-(\log a)/(\log b)}, \tag{56}$$

donde F es cualquier función periódica de período uno. Debido a que estamos interesados en el comportamiento para x próximo a cero, para que exista el límite de la función

$$F\left(\frac{\log x}{\log b}\right), \tag{57}$$

entonces F debe ser una constante. Luego, la longitud de correlación debe satisfacer la siguiente ley de escala:

$$\xi(t) \sim t^{-\nu}, \tag{58}$$

donde

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} \approx 1{,}3383. \tag{59}$$

El valor obtenido para la solución exacta del modelo de Ising es 1. Lo que es significativo aquí no es tanto el modesto acuerdo entre los dos valores, sino el hecho de que el formalismo del grupo de renormalización predice una ley de escala para la longitud de correlación cerca de la temperatura crítica.