

Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2023

Guía 9: Grupo de renormalización para la cadena de Ising 1D

■ **Problema 6.** Considere una cadena de Ising lineal, cerrada, con $N = 2^k$ espines. El conjunto de todos los espines, $\{s_i\} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, puede separarse en los espines que ocupan posiciones pares y los espines que ocupan posiciones impares:

$$\{s_i\} = \{s_{2i}\} \cup \{s_{2i+1}\}. \quad (1)$$

El hamiltoniano es una función del conjunto de todos los espines,

$$\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K) = -\beta H(\{s_i\}, b, K) = b \sum_{i=1}^N s_i + K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}, \quad (2)$$

con $s_{N+1} = s_1$. La distribución de probabilidad en el ensamble canónico es

$$P(\{s_i\}, b, K) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)}}{Z(N, b, K)}, \quad (3)$$

donde la función de partición está dada por

$$Z(N, b, K) = \sum_{\{s_i\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)}. \quad (4)$$

El primer objetivo del problema es eliminar de la descripción a los espines impares, calculando la probabilidad marginal de los espines pares.

a) Sumando la probabilidad sobre los espines impares, muestre que la probabilidad de los espines pares tiene la misma forma que la probabilidad original,

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} P(\{s_i\}, b, K) = P(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K}) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}}{Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (5)$$

con $\bar{N} = \frac{1}{2}N$ y acoplamientos $\bar{b} = \bar{b}(b, K)$ y $\bar{K} = \bar{K}(b, K)$. Estas son las ecuaciones de transformación del grupo de renormalización. Resulta más cómodo expresar estas ecuaciones en términos de $\eta = e^{-2b}$ y $\tau = e^{-4K}$, de manera que escriba las ecuaciones de transformación para estos parámetros.

Si $N = 2^k$, con k tan grande como se quiera, la transformación puede iterarse indefinidamente, dando lugar a una secuencia de parámetros renormalizados, $\eta^{(n)}$ y $\tau^{(n)}$. Un punto fijo de la transformación es un par de valores (η^*, τ^*) tales que $\bar{\eta}(\eta^*, \tau^*) = \eta^*$ y $\bar{\tau}(\eta^*, \tau^*) = \tau^*$. Suponga que los parámetros iniciales difieren poco de los de un punto fijo, $\eta = \eta^* + \delta\eta$ y $\tau = \tau^* + \delta\tau$, y que la transformación se linealiza alrededor de este punto. Se dice que el punto fijo es linealmente estable con respecto a las perturbaciones en η si $|\delta\eta^{(n)}| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, e inestable si $|\delta\eta^{(n)}| \rightarrow \infty$. Análogamente, se define la estabilidad lineal respecto de τ .

- b) Encuentre todos los puntos fijos en la región $[0, 1] \times [0, 1]$ y muestre que $(\eta^*, \tau^*) = (1, 0)$ es un punto fijo linealmente inestable respecto de los dos parámetros.

El valor medio de la magnetización por espín tiene que ser el mismo tanto si se lo calcula con la probabilidad detallada como si se lo calcula con la probabilidad del sistema decimado. Eso significa que

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \log Z(N, b, K)}{\partial b} = \frac{1}{\bar{N}} \frac{\partial \log Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}{\partial \bar{b}}. \quad (6)$$

En los dos miembros de la ecuación aparece, en realidad, la misma función

$$m(N, b, K) = \frac{1}{N} \frac{\partial \log Z(N, b, K)}{\partial b}. \quad (7)$$

De forma que lo que en verdad se está afirmando es que

$$m(N, b, K) = m(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}). \quad (8)$$

Asumiendo que el sistema es extensivo, en el límite en el que $N \rightarrow \infty$, la función $m(N, b, K)$ debe tender a una función independiente de N .

- c) Use la transformación de grupo de renormalización para mostrar que, en el límite $N \rightarrow \infty$, cerca de $T = 0$ y $B = 0$, la función m satisface la siguiente ley de escala

$$m(b, \tau) \simeq \mathcal{M}(b\tau^{-\Delta}). \quad (9)$$

Encuentre el exponente Δ y compare con la solución exacta en el mismo límite.

■ **Solución.** En este problema el objetivo es definir una transformación de grupo de renormalización para la cadena de Ising lineal. No se examina en detalle la relación entre el grupo de renormalización y los fenómenos críticos, pero, por ejemplo, se deduce una ley de escala para la magnetización a bajas temperaturas y campos débiles.

La transformación de grupo de renormalización que vamos a definir consiste en la eliminación de los grados de libertad asociados a los espines en las posiciones impares de la cadena. A partir de una descripción detallada de los N espines iniciales, obtendremos una descripción de los $N/2$ espines en las posiciones pares. Evidentemente, esta descripción es menos detallada que la original. Las correlaciones que podremos estudiar tendrán una escala de longitud mínima igual al doble de la separación entre los espines de la red original. En este sentido, estamos eliminando información sobre las escalas de longitud microscópicas y obtenemos una descripción en escalas de longitud mayores.

Para entender de qué se trata la transformación que vamos a definir, conviene empezar con un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos dos grados, s_1 y s_2 , que pueden tomar valores en los enteros con cierta probabilidad conjunta, $P(s_1, s_2)$. Esta función es todo lo que necesitamos para calcular valores medios de funciones de las dos variables. Por

ejemplo,

$$\langle f(s_1, s_2) \rangle = \sum_{s_1} \sum_{s_2} P(s_1, s_2) f(s_1, s_2). \quad (10)$$

Pero si lo único que estamos interesados en calcular son valores medios de funciones de s_1 , no es necesario conocer $P(s_1, s_2)$. En efecto, dada una función $f(s_1)$, su valor medio es

$$\langle f(s_1) \rangle = \sum_{s_1} \sum_{s_2} P(s_1, s_2) f(s_1) = \sum_{s_1} \left[\sum_{s_2} P(s_1, s_2) \right] f(s_1) \equiv \sum_{s_1} P(s_1) f(s_1), \quad (11)$$

donde

$$P(s_1) = \sum_{s_2} P(s_1, s_2). \quad (12)$$

La función $P(s_1)$ es la distribución de probabilidad marginal de s_1 . Esta función contiene menos información que $P(s_1, s_2)$. De una descripción detallada en términos de s_1 y de s_2 , pasamos a una descripción menos detallada, sólo en términos de s_1 . El cambio en la descripción opera en una sola dirección: a partir de $P(s_1)$ no podemos recuperar $P(s_1, s_2)$.

Esta misma idea puede aplicarse para definir una transformación de grupo de renormalización para el sistema de N espines. En el ensamble canónico, la distribución de probabilidad de una configuración $\{s_i\}$ es

$$P(\{s_i\}) = \frac{e^{-\beta H(\{s_i\})}}{Z_N} \equiv \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_i\})}}{Z_N}, \quad (13)$$

donde

$$Z_N = \sum_{\{s_i\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\})}. \quad (14)$$

La suma es sobre las configuraciones de los N espines. La probabilidad (13) describe detalladamente el sistema. Es una función tanto de los espines en posiciones pares, digamos, los $\{s_{2i}\}$, como de los espines en las posiciones impares, los $\{s_{2i+1}\}$,

$$P(\{s_i\}) = P(\{s_{2i}, \{s_{2i+1}\}). \quad (15)$$

Si sumamos sobre los espines impares, obtendremos la distribución de probabilidad marginal de los espines pares,

$$\bar{P}(\{s_{2i}\}) = \sum_{\{s_{2i+1}\}} P(\{s_{2i}, \{s_{2i+1}\}) = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}, \{s_{2i+1}\})}. \quad (16)$$

Este grado de detalle en la descripción es suficiente para calcular valores medios de funciones que dependan únicamente de los espines pares. El asunto radica en poder hacer explícitamente la suma indicada en la Ec. (16) y en poder escribir el resultado de una

manera análoga a la de la probabilidad conjunta original. Es decir, en términos de un hamiltoniano efectivo para los espines pares.

Entonces, el objetivo principal ahora es definir un hamiltoniano efectivo para los espines pares. El hamiltoniano* en el modelo de Ising unidimensional es de la forma

$$\mathcal{H}(\{s_i\}) = b \sum_{i=1}^N s_i + K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}. \quad (17)$$

Usamos condiciones de contorno periódicas, de manera que $s_{N+1} = s_1$. El hamiltoniano puede considerarse una función del estado de la red y también de las constantes de acoplamiento b y K . Así que sería más apropiado escribir

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{s_i\}, b, K). \quad (18)$$

Si la suma sobre los espines impares en la Ec. (16) pudiera escribirse como

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} = Z_0(N, b, K) e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (19)$$

donde \mathcal{H} es la misma función de partida pero evaluada en acoplamientos renormalizados, entonces la distribución de probabilidad para los espines pares tendrá la misma forma que la distribución original, sólo que ahora aparecerán la mitad de los grados de libertad y los acoplamientos estarán renormalizados:

$$\bar{P}(\{s_{2i}\}) = \frac{Z_0(N, b, K)}{Z(N, b, K)} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}. \quad (20)$$

Aquí hemos escrito con mayor detalle las variables de las que puede depender Z_N . Los acoplamientos renormalizados serán función de los acoplamientos originales

$$\bar{b} = \bar{b}(b, K), \quad (21)$$

$$\bar{K} = \bar{K}(b, K).$$

Para calcular valores medios, alcanza con conocer el hamiltoniano renormalizado,

$$\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K}), \quad (22)$$

es decir, los acoplamientos \bar{b} y \bar{K} . Conocida esta función, no es necesario calcular por métodos directos el prefactor

$$\frac{Z_0(N, b, K)}{Z(N, b, K)}. \quad (23)$$

*Seguimos la notación de Goldenfeld, que se refiere a H y a $\mathcal{H} = -\beta H$ indistintamente como hamiltonianos.

La probabilidad será simplemente

$$\bar{P}(\{s_{2i}\}) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}}{Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (24)$$

donde

$$Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}) = \sum_{\{s_{2i}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (25)$$

con $\bar{N} = \frac{1}{2}N$. Como la probabilidad tiene que sumar uno, todo queda definido en términos del nuevo hamiltoniano, que siempre es la misma función, sólo que evaluada en distintos valores de las constantes de acoplamiento. En última instancia, el hecho de que no sea necesario calcular el prefactor (23) es consecuencia de la normalización de la probabilidad. Sumando la Ec. (20) sobre las configuraciones de los espines pares, obtenemos

$$\frac{Z(N, b, K)}{Z_0(N, b, K)} = \sum_{\{s_{2i}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})} = Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}). \quad (26)$$

El paso decisivo es demostrar la validez de la Ec. (19),

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} = Z_0(N, b, K) e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}. \quad (27)$$

Esta ecuación implica que la transformación es cerrada respecto al conjunto de acoplamientos (b, K) . En este sentido, el caso de la red unidimensional es excepcional. El hamiltoniano renormalizado tiene la misma forma que el hamiltoniano original, de modo que uno puede iterar la transformación una y otra vez sólo con haber calculado el primer paso. Lo que sucede habitualmente es que uno parte de un hamiltoniano que incluye ciertos términos de interacción, con acoplamientos K_0, K_1, \dots, K_n y, al eliminar los grados de libertad elegidos, se genera un hamiltoniano con un conjunto más general de interacciones, que involucra los acoplamientos originales renormalizados, $\bar{K}_0, \bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n$, pero también un conjunto adicional de acoplamientos, K_{n+1}, K_{n+2}, \dots . Para poder iterar la transformación, uno tiene que incluir esas interacciones más generales desde un principio y repetir el primer paso de la transformación. Esto puede generar todavía más clases de interacciones y un conjunto mayor de constantes de acoplamiento. Será entonces necesario repetir el primer paso de la transformación teniendo en cuenta estas nuevas interacciones. El proceso se repite hasta que no se generen nuevos acoplamientos. Entonces el hamiltoniano será lo suficientemente general como para que la transformación sea cerrada. El resultado habitual es que uno tiene que incluir desde el principio todas las interacciones posibles. Como tal situación es inmanejable, debe recurrirse a algún tipo de aproximación.

Afortunadamente, como veremos a continuación, nada de esto pasa con la cadena lineal.

La transformación es cerrada respecto de la familia de hamiltonianos de la forma

$$\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K) = b \sum_{i=1}^N s_i + K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}. \quad (28)$$

Para ver eso, tenemos que demostrar que vale la Ec. (27), reescrita aquí por enésima vez,

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} = Z_0(N, b, K) e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}. \quad (29)$$

Sabemos que el factor de Boltzmann puede escribirse usando la matriz de transferencia,

$$e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} = \exp\left(b \sum_{i=1}^N s_i + K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}\right) = q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} q_{s_3 s_4} \cdots q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}, \quad (30)$$

donde

$$q_{s_i s_j} = \exp\left(b \frac{s_i + s_j}{2} + K s_i s_j\right). \quad (31)$$

Si definimos el estado e_1 como el que corresponde a $s = 1$ y el estado e_2 como el que corresponde a $s = -1$, matricialmente,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} e^{K+b} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-b} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} xy & x^{-1} \\ x^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

con $x = e^K$ e $y = e^b$. Entonces, la suma sobre los espines impares es

$$\begin{aligned} \sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} &= \sum_{s_1, s_3, \dots, s_{N-1}} q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} q_{s_3 s_4} \cdots q_{s_{N-2} s_{N-1}} q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1} \\ &= \sum_{s_1} q_{s_1 s_2} (q^2)_{s_2 s_4} \cdots (q^2)_{s_{N-2} s_N} q_{s_N s_1} \\ &= (q^2)_{s_2 s_4} \cdots (q^2)_{s_{N-2} s_N} (q^2)_{s_N s_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Si pudiéramos hacer la identificación

$$q^2 = c(b, K) \mathbf{q}(\bar{b}, \bar{K}) = c \bar{\mathbf{q}}, \quad (34)$$

entonces,

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}, b, K)} = c^{N/2} \bar{q}_{s_2 s_4} \bar{q}_{s_4 s_6} \cdots \bar{q}_{s_N s_2} = c^{N/2} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (35)$$

con lo que cumpliríamos el objetivo fijado por la Ec. (29).

Explícitamente,

$$\mathbf{q}^2 = \begin{pmatrix} x^2y^2 + x^{-2} & y + y^{-1} \\ y + y^{-1} & x^2y^{-2} + x^{-2} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Debemos mostrar que \mathbf{q}^2 , salvo un factor multiplicativo, tiene la misma forma que \mathbf{q} ,

$$\begin{pmatrix} x^2y^2 + x^{-2} & y + y^{-1} \\ y + y^{-1} & x^2y^{-2} + x^{-2} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \bar{x}\bar{y} & \bar{x}^{-1} \\ \bar{x}^{-1} & \bar{x}\bar{y}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Tenemos, entonces, tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x^2y^2 + x^{-2} &= c \bar{x}\bar{y}, \\ y + y^{-1} &= c \bar{x}^{-1}, \\ x^2y^{-2} + x^{-2} &= c \bar{x}\bar{y}^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

No estamos especialmente interesados en el factor c . Si multiplicamos entre sí la primera y la última ecuación y dividimos el resultado por la segunda ecuación al cuadrado, queda

$$\bar{x}^4 = \frac{(x^2y^2 + x^{-2})(x^2y^{-2} + x^{-2})}{(y + y^{-1})^2}. \quad (39)$$

En tanto que si dividimos entre sí la primera y la última ecuación, resulta

$$\bar{y}^2 = \frac{x^2y^2 + x^{-2}}{x^2y^{-2} + x^{-2}}. \quad (40)$$

En lugar de trabajar con x e y , conviene definir

$$\eta = y^{-2} = e^{-2b}, \quad \tau = x^{-4} = e^{-4K}. \quad (41)$$

En términos de estos parámetros, es fácil ver que la transformación se escribe como

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{\eta + \tau}{1 + \eta\tau} \eta, \\ \bar{\tau} &= \frac{(1 + \eta)^2}{(1 + \eta\tau)(\eta + \tau)} \tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Estas son las ecuaciones de transformación del grupo de renormalización.

Puntos fijos

Los puntos fijos de la transformación son importantes. Si el par (η, τ) es un punto fijo de la transformación, entonces

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\eta + \tau}{1 + \eta\tau} \eta, \\ \tau &= \frac{(1 + \eta)^2}{(1 + \eta\tau)(\eta + \tau)} \tau.\end{aligned}\tag{43}$$

Aquí hay que tener un poco de cuidado antes de cancelar términos a un lado y al otro de las ecuaciones. El caso $\eta = 0$ y $\tau = 0$ es singular, así que dejémoslo de lado.

- Si $\eta = 0$, la primera ecuación se cumple automáticamente. Entonces, si $\tau \neq 0$, la segunda ecuación requiere que sea $\tau = 1$. Este punto fijo corresponde a $b \rightarrow \infty$ y $K = 0$, es decir, campo externo infinito y acoplamiento igual a cero.
- Si $\eta \neq 0$ y $\tau = 0$, la segunda ecuación se cumple automáticamente y la primera requiere que $\eta = \eta^2$. Puesto que $\eta \neq 0$, debe ser $\eta = 1$. Este punto fijo corresponde a $b = 0$ y $K \rightarrow \infty$, es decir $J/kT \rightarrow \infty$.
- Si $\eta \neq 0$ y $\tau \neq 0$, obtenemos dos ecuaciones,

$$\begin{aligned}(1 + \eta\tau) &= \eta + \tau, \\ (1 + \eta\tau)(\eta + \tau) &= (1 + \eta)^2.\end{aligned}\tag{44}$$

Sólo buscamos soluciones con $\eta > 0$ y $\tau > 0$. Es fácil ver que debe ser $\tau = 1$ y que el valor de η es indiferente. Existe, así, una línea de puntos fijos, que corresponde a sistemas con acoplamiento nulo y campo externo arbitrario. Vemos entonces que el primer punto fijo, $\eta = 0$ y $\tau = 1$, pertenece, en realidad, a esta línea de puntos fijos.

El punto fijo $(\eta^*, \tau^*) = (1, 0)$ corresponde a un sistema con acoplamiento infinito y campo externo cero. En verdad, lo que es infinito es el factor J/kT . Así que, de igual forma, podemos considerar que este punto fijo corresponde a un sistema a temperatura cero.

Una vez determinados los puntos fijos, es importante determinar su estabilidad. Si (η^*, τ^*) es un punto fijo de la transformación, estudiamos la transformación en la vecindad del punto fijo. Escribimos

$$\eta = \eta^* + \delta\eta, \quad \tau = \tau^* + \delta\tau,\tag{45}$$

linealizamos la transformación alrededor del punto fijo y calculamos cómo transforman $\delta\eta$ y $\delta\tau$. Las Ecs. (42) pueden escribirse genéricamente como

$$\bar{\eta} = f(\eta, \tau), \quad \bar{\tau} = g(\eta, \tau).\tag{46}$$

Las ecuaciones linealizadas alrededor del punto fijo (η^*, τ^*) son

$$\begin{aligned}\overline{\delta\eta} &= \frac{\partial f}{\partial \eta}(\eta^*, \tau^*) \delta\eta + \frac{\partial f}{\partial \tau}(\eta^*, \tau^*) \delta\tau, \\ \overline{\delta\tau} &= \frac{\partial g}{\partial \eta}(\eta^*, \tau^*) \delta\eta + \frac{\partial g}{\partial \tau}(\eta^*, \tau^*) \delta\tau.\end{aligned}\tag{47}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \overline{\delta\eta} \\ \overline{\delta\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial \eta} & \frac{\partial f^*}{\partial \tau} \\ \frac{\partial g^*}{\partial \eta} & \frac{\partial g^*}{\partial \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\eta \\ \delta\tau \end{pmatrix}.\tag{48}$$

En el caso del punto fijo $\eta^* = 1, \tau^* = 0$, resulta

$$\begin{pmatrix} \overline{\delta\eta} \\ \overline{\delta\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\eta \\ \delta\tau \end{pmatrix}.\tag{49}$$

Si inicialmente

$$\delta\eta = \delta\eta^{(0)}, \quad \delta\tau = \delta\tau^{(0)},\tag{50}$$

luego de aplicar la transformación n veces, obtenemos

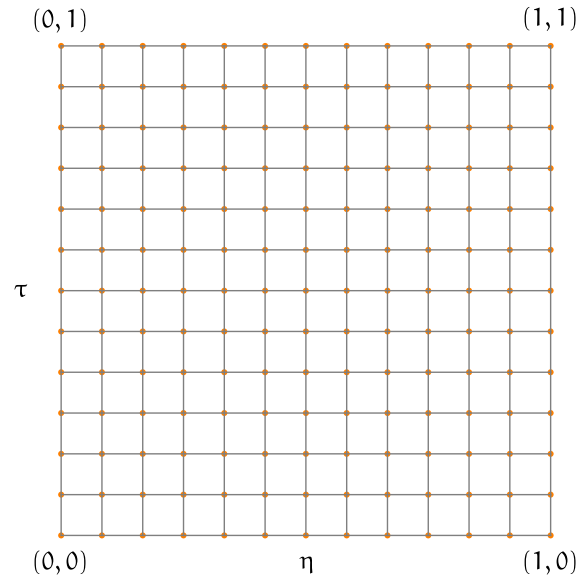
$$\begin{aligned}\delta\eta^{(n)} &= 2^n \delta\eta^{(0)}, \\ \delta\tau^{(n)} &= 4^n \delta\tau^{(0)}.\end{aligned}\tag{51}$$

La perturbación se ve amplificada a medida que se aplica la transformación. El punto fijo es inestable.

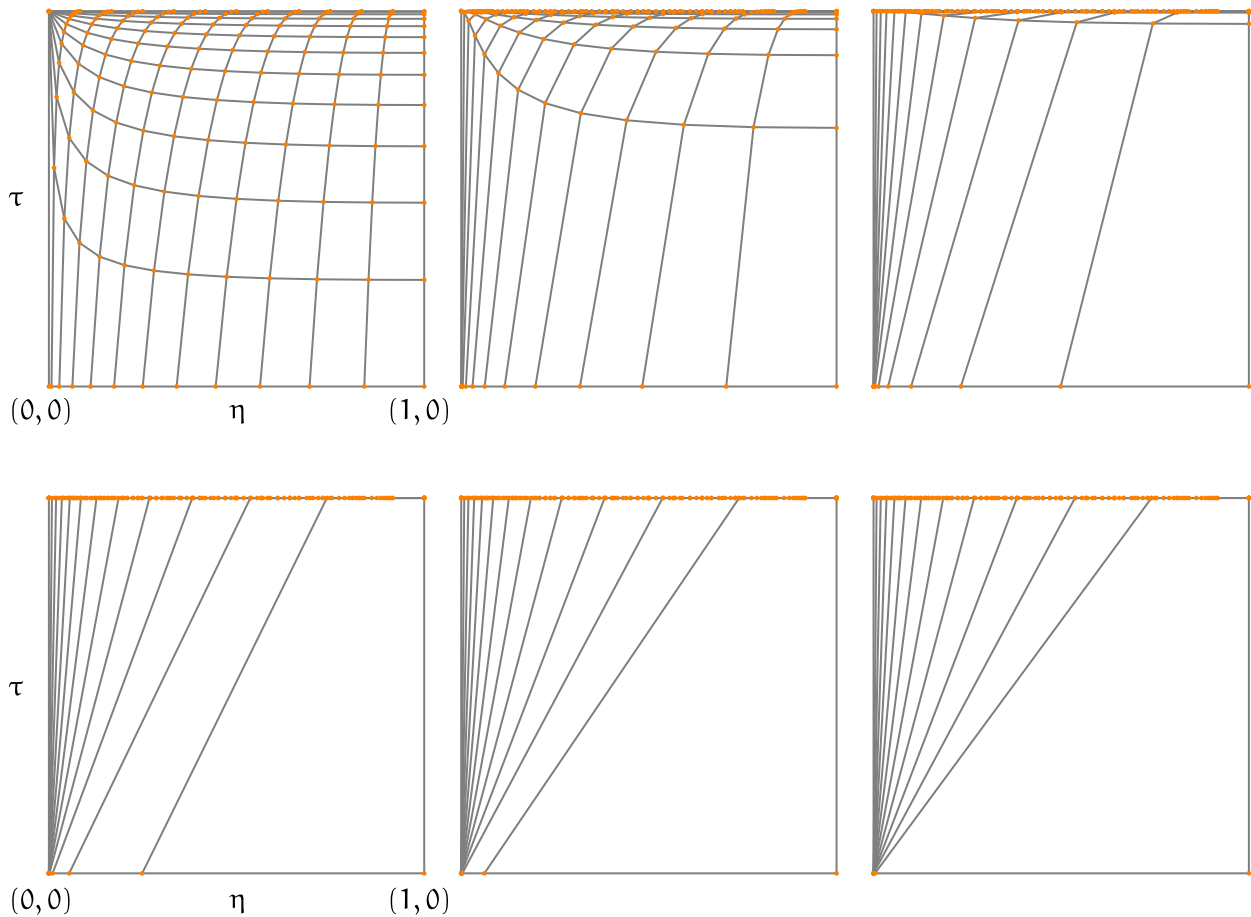
La clasificación de la estabilidad lineal de los puntos fijos depende de si los autovalores de la matriz que aparece en la Ec. (48) tienen módulos mayores, menores o iguales a uno. El análisis de la estabilidad lineal falla para la línea de puntos fijos con $\tau = 1$ y falla también para el punto $(0,0)$, donde la transformación es discontinua. Un análisis más detallado muestra que todos los puntos de la región $[0, 1] \times [0, 1]$, salvo el origen y el punto fijo $(0, 1)$ *fluyen* hacia la línea de puntos fijos en $\tau = 1$. Aquí pueden ver una animación del flujo de puntos para un enjambre de condiciones iniciales elegidas al azar. Como el mapa es discreto y típicamente basta una decena de pasos para que un punto sea absorbido por la línea de puntos fijos, en la animación se ha hecho una interpolación lineal, para tener una transformación con parámetro continuo. La evolución real es abrupta, como veremos en la próxima sección.

El mapa

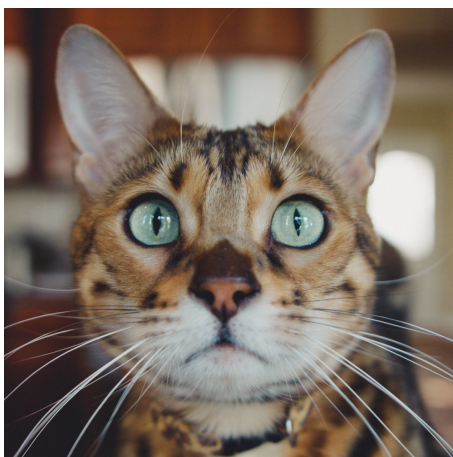
La transformación del grupo de renormalización define un mapa de la región $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano η - τ en sí misma. El punto $(0, 1)$ es un punto fijo inestable. La línea de puntos fijos $\tau = 1$ es estable. Si definimos una grilla, tal como la que muestra la figura,



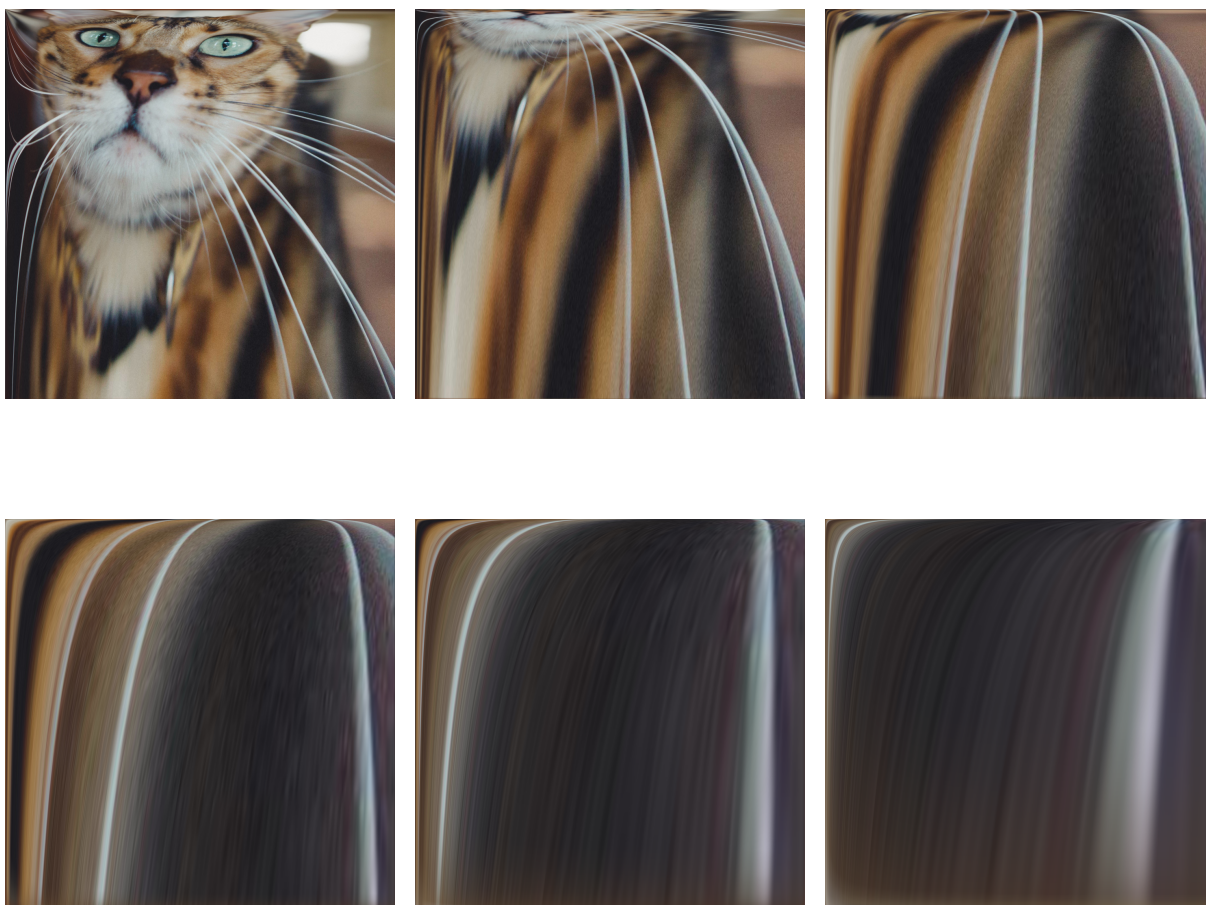
e iteramos la transformación del grupo de renormalización, podemos ver cómo se deforma la grilla a cada paso. El resultado de los primeros pasos se muestra en las figuras siguientes.



Para ver el mapa con más detalle, no se gana mucho aumentando el número de puntos de la grilla. Pero lo que puede hacerse es reemplazar la grilla por una imagen. La figura muestra la imagen inicial que, según la tradición que inició Arnold, debe ser la de un gato.



La aplicación sucesiva de la transformación genera las siguientes imágenes.



Aquí hay una animación del mapa en su versión continua, sólo con fines ilustrativos. El mapa verdadero es discreto.

Scaling

La transformación del grupo de renormalización elimina de la descripción del sistema ciertos grados de libertad. Una observación clave es que, al eliminar grados de libertad, no estamos modificando el sistema, sólo el nivel de detalle con el que lo estamos describiendo. Las correlaciones entre los espines sobrevivientes tienen que valer lo mismo, tanto si se las calcula con la probabilidad detallada,

$$P(\{s_i\}) = P(\{s_{2i}, \{s_{2i+1}\}) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}, \{s_{2i+1}\}, b, K)}}{Z(N, b, K)}, \quad (52)$$

como si se las calcula con la probabilidad marginalizada,

$$\bar{P}(\{s_{2i}\}) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}, \bar{b}, \bar{K})}}{Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}, \quad (53)$$

donde \bar{b} y \bar{K} son los valores renormalizados de las constantes de acoplamiento y $\bar{N} = \frac{1}{2}N$. Por ejemplo, si queremos calcular el valor medio de la magnetización por espín, que es igual al valor medio de cualquier espín de la cadena, tenemos dos alternativas: usar la probabilidad detallada, en cuyo caso escribiremos

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial \log Z(N, b, K)}{\partial b}, \quad (54)$$

o usar la probabilidad marginalizada, como en la siguiente ecuación:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{\bar{N}} \frac{\partial \log Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}{\partial \bar{b}}. \quad (55)$$

Si definimos la función

$$m(N, b, K) = \frac{1}{N} \frac{\partial \log Z(N, b, K)}{\partial b}, \quad (56)$$

lo anterior significa que

$$m(N, b, K) = m(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}). \quad (57)$$

Asumiendo que el sistema es extensivo, en el límite en el que $N \rightarrow \infty$, la función $m(N, b, K)$ tenderá a una función $m(b, K)$ independiente de N . Hacer tender N a infinito es hacer también tender \bar{N} a infinito. De manera que, en ese límite,

$$m(b, K) = m(\bar{b}, \bar{K}). \quad (58)$$

Esta relación, que dedujimos aplicando la transformación del grupo de renormalización una sola vez, tiene que ser cierta a medida que iteramos la transformación. Llamemos $b^{(0)}$ y $K^{(0)}$ a los acoplamientos iniciales, y $b^{(n)}$ y $K^{(n)}$ a los acoplamientos luego de haber

aplicado n veces la transformación. Entonces,

$$m(\mathbf{b}^{(0)}, \mathbf{K}^{(0)}) = m(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{K}^{(1)}) = m(\mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{K}^{(2)}) = \dots = m(\mathbf{b}^{(n)}, \mathbf{K}^{(n)}). \quad (59)$$

Nos convendrá considerar a m función de \mathbf{b} y de τ , y escribir la relación anterior como

$$m(\mathbf{b}^{(0)}, \tau^{(0)}) = m(\mathbf{b}^{(n)}, \tau^{(n)}). \quad (60)$$

Lo que sigue es una aplicación de este resultado, que muestra cómo surgen naturalmente las leyes de escala si se emplea el formalismo del grupo de renormalización.

Si al comienzo los acoplamientos toman valores cercanos al punto fijo $(\eta^*, \tau^*) = (1, 0)$, podemos aplicar la transformación linealizada. Inicialmente debe ser

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= 1 + \delta\eta^{(0)}, \\ \tau^{(0)} &= \tau. \end{aligned} \quad (61)$$

Debido a que $\eta = e^{-2b}$, un valor de η cercano a uno, implica un valor de b cercano a cero, y vale la relación $\delta\eta \approx -2b$. Sabemos que cerca de este punto fijo las perturbaciones evolucionan según

$$\delta\eta^{(n)} = 2^n \delta\eta^{(0)}, \quad \tau^{(n)} = 4^n \tau^{(0)}. \quad (62)$$

En particular, la primera ecuación implica que

$$\mathbf{b}^{(n)} \approx 2^n \mathbf{b}^{(0)}. \quad (63)$$

Así, la Ec. (60) puede leerse como

$$m(\mathbf{b}, \tau) \simeq m(2^n \mathbf{b}, 4^n \tau). \quad (64)$$

El signo de aproximación tiene en cuenta que para deducir este resultado empleamos la forma linealizada de la transformación cerca del punto fijo y a que aproximamos $\delta\eta$ por $-2b$. Es fácil ver que la Ec. (64) se satisface si

$$m(\mathbf{b}, \tau) \simeq \mathcal{M}(\mathbf{b}\tau^{-1/2}), \quad (65)$$

para cualquier función de una variable, $\mathcal{M}(x)$. Uno podría preguntarse si esta es la única posibilidad. Cualquier función $f(x, y)$ de dos variables positivas puede escribirse como

$$f(x, y) = g(xy^{-1/2}, y). \quad (66)$$

Esto es cierto porque el cambio de variables

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}y^{-1/2}, \quad \mathbf{v} = y \quad (67)$$

es uno a uno. Las relaciones inversas son

$$x = uv^{1/2}, \quad y = v. \quad (68)$$

Entonces, explícitamente, la función g que aparece en la Ec. (66) es

$$g(u, v) = f(uv^{1/2}, v). \quad (69)$$

Si la función f es tal que

$$f(x, y) = f(2^n x, 4^n y), \quad (70)$$

la Ec. (66) implica

$$g(xy^{-1/2}, y) = g(xy^{-1/2}, 4^n y), \quad (71)$$

que es equivalente a

$$g(u, v) = g(u, 4^{-n}v). \quad (72)$$

Si existe el límite

$$\lim_{v \rightarrow 0} g(u, v) = G(u), \quad (73)$$

entonces, tomando $n \rightarrow \infty$ en la Ec. (72),

$$g(u, v) = G(u). \quad (74)$$

Esto quiere decir que la función $g(u, v)$ es independiente de v . Por lo tanto, la Ec. (66) se lee como

$$f(x, y) = G(xy^{-1/2}), \quad (75)$$

que es lo que queríamos demostrar.

La conclusión es que, para campos débiles y temperaturas bajas,

$$m(b, \tau) \simeq \mathcal{M}(b\tau^{-1/2}). \quad (76)$$

Puesto que la cadena unidimensional de Ising tiene una solución conocida, podemos comparar la predicción del grupo de renormalización con la solución exacta. En el problema 1 de la Guía 8, se demuestra que, en el límite termodinámico, la magnetización por espín está dada exactamente por

$$m(b, \tau) = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + \tau}}. \quad (77)$$

Si el campo es débil, podemos aproximar $\sinh b \simeq b$. Por lo tanto,

$$m(b, \tau) \simeq \frac{b}{\sqrt{b^2 + \tau}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (b\tau^{-1/2})^{-2}}}. \quad (78)$$

Esto tiene la forma funcional predicha por el grupo de renormalización, aunque no requiere que τ sea un número pequeño.

Queda como ejercicio que verifiquen que la relación (58), con m dado por la expresión (77), vale en general. Es decir, tienen que verificar que,

$$m(\eta, \tau) = m(\bar{\eta}, \bar{\tau}), \quad (79)$$

donde $\bar{\eta}$ y $\bar{\tau}$ están dados por la Ec. (42).

En la redacción original de la guía también se pedía encontrar una relación entre las funciones de partición de la red original y de la red decimada. Recordemos que, según la Ec. (20),

$$\bar{P}(\{s_{2i}\}) = \frac{Z_0(N, b, K)}{Z(N, b, K)} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})}. \quad (80)$$

La probabilidad debe sumar uno, de modo que

$$1 = \frac{Z_0(N, b, K)}{Z(N, b, K)} \sum_{\{s_{2i}\}} e^{\mathcal{H}(\{s_{2i}\}, \bar{b}, \bar{K})} = \frac{Z_0(N, b, K)}{Z(N, b, K)} Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}). \quad (81)$$

Equivalentemente,

$$Z(N, b, K) = Z_0(N, b, K) Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}). \quad (82)$$

Esta es la relación buscada. Más precisamente, a partir de las Ecs. (29) y (35), la función $Z_0(N, b, K)$ debe identificarse con $c^{N/2}$, donde c es la constante que introdujimos en la Ec. (34). No la despejamos en aquel entonces, pero no es difícil demostrar, a partir de las Ecs. (38), que

$$\begin{aligned} c(b, K)^4 &= (x^2 y^2 + x^{-2}) (x^2 y^{-2} + x^{-2}) (y + y^{-1})^2 \\ &= \frac{1}{\eta^2 \tau} (1 + \eta \tau) (\eta + \tau) (1 + \eta)^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Tomando el logaritmo de la Ec. (82) y dividiendo por el número de espines, obtenemos una relación entre las energías libres por espín del sistema original y del sistema decimado:

$$f(N, b, K) = \frac{1}{2} \left[\log c(b, K) + f(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K}) \right]. \quad (84)$$

donde f es, en realidad, $-\beta F$. En el límite $N \rightarrow \infty$, esperamos que la energía libre por espín

sea independiente de N . Por lo tanto, en ese límite,

$$f(\mathbf{b}, \mathbf{K}) = \frac{1}{2} \left[\log c(\mathbf{b}, \mathbf{K}) + f(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{K}}) \right]. \quad (85)$$

En el problema 1 de la Guía 8 se demostró que

$$f(\mathbf{b}, \mathbf{K}) = \log \lambda_+(\mathbf{b}, \mathbf{K}), \quad (86)$$

donde λ_+ es el autovalor de la matriz de transferencia de mayor módulo. Explícitamente,

$$\lambda_+(\mathbf{b}, \mathbf{K}) = e^{\mathbf{K}} \left(\cosh \mathbf{b} + \sqrt{\sinh^2 \mathbf{b} + e^{-4\mathbf{K}}} \right) = \frac{1 + \eta + \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\eta\tau}}{2\eta^{1/2}\tau^{1/4}}. \quad (87)$$

La verificación directa de la Ec. (85) queda como ejercicio. La Ec. (84) es más general, pero sería muy tedioso verificarla directamente.