Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2024

Clase práctica del 5/6

Modelo de Ising en una dimensión. Método de la matriz de transferencia.

Problema 1. (Huang §14.6, Pathria y Beale §13.2). En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto exactamente mediante el método de la *matriz de transferencia*. Considere una cadena cerrada de N espines. Si se definen $b = \beta\mu B$, $K = \beta J$ y $s_{N+1} = s_1$, la función de partición es

$$Z_N(b, K) = \sum_{s_1,\ldots,s_N=\pm 1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} (b s_i + K s_i s_{i+1})\right]. \tag{1}$$

a) Muestre que $Z_N = \mathrm{Tr}(\mathbf{q}^N)$, donde $\mathbf{q}$ es la matriz de 2×2 con elementos

$$q_{ss'} = \exp\left[\frac{b}{2}(s + s') + K\, ss'\right], \qquad s, s' = \pm 1. \tag{2}$$

b) Muestre que la función de partición puede escribirse como $Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$, donde

$$\lambda_\pm = e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right) \tag{3}$$

son los autovalores de la matriz $\mathbf{q}$.

c) Muestre que $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_N = \log \lambda_+$.

d) Derivando adecuadamente la función de partición, encuentre la magnetización media por espín y estudie el límite $N \to \infty$.

e) Muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B \to 0^+$ en el límite $N \to \infty$, a menos que $T = 0$.

Solución. Consideremos una cadena lineal, cerrada, de N espines, con acoplamientos a primeros vecinos y en un campo externo. El hamiltoniano es

$$H(\{s\}) = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i. \tag{4}$$

Usamos la notación $\{s\} = \{s_1, \ldots, s_N\}$. Por simplicidad, supondremos que $\mu > 0$. Puesto que la cadena es cerrada, el último término en la primera suma debe interpretarse como $s_N s_{N+1} = s_N s_1$. Cuando el sistema está a temperatura T, el factor de Boltzmann es

$$e^{-\beta H(\{s\})} = \exp\left(K \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + b \sum_{i=1}^{N} s_i\right), \tag{5}$$

donde $K = \beta J$ y $b = \beta\mu B$. La probabilidad de una configuración determinada es

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta H(\{s\})} = \frac{1}{Z_N} \exp\left(K \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + b \sum_{i=1}^{N} s_i \right), \tag{6}$$

donde la función de partición está dada por

$$Z_N(K, b) = \sum_{\{s\}} \exp\left(K \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + b \sum_{i=1}^{N} s_i \right). \tag{7}$$

Hay muchas maneras de calcular Z_N. El método más simple es el de la matriz de transferencia. Además, este método puede extenderse a muchos otros problemas que serían difíciles de resolver por métodos combinatorios directos. La idea es escribir el término general de la suma que aparece en Z_N como un producto de elementos de cierta matriz. Haremos esto en dos pasos: primero mostraremos cuál es es la idea del método, pero obtendremos una matriz de transferencia un poco inconveniente. Luego veremos cómo una modificación trivial nos conduce a una matriz de transferencia más adecuada.

Empecemos escribiendo el factor de Boltzmann por extenso:

$$e^{-\beta H(\{s\})} = e^{K s_1 s_2} e^{b s_1}\, e^{K s_2 s_3} e^{b s_2} \ldots\, e^{K s_{N-1} s_N} e^{b s_{N-1}}\, e^{K s_N s_1} e^{b s_N}. \tag{8}$$

Puede pensarse que cada término de la forma $e^{Kss'} e^{bs}$ es el elemento de matriz $m_{ss'}$ de cierta matriz $\mathbf{m}$,

$$m_{ss'} = e^{Kss'} e^{bs}. \tag{9}$$

Los índices s y s' en lugar de tomar los valores 1 y 2, toman los valores 1 y -1, pero eso no representa una diferencia esencial. Uno puede numerar arbitrariamente las filas y columnas de una matriz. Explícitamente, usando la notación $\bar{1} = -1$,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{1\bar{1}} \\ m_{\bar{1}1} & m_{\bar{1}\bar{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K+b} & e^{-K+b} \\ e^{-K-b} & e^{K-b} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Volviendo a la Ec. (8),

$$e^{-\beta H(\{s\})} = m_{s_1 s_2} m_{s_2 s_3} \ldots\, m_{s_{N-1} s_N} m_{s_N s_1}. \tag{11}$$

Entonces,

$$Z_N = \sum_{s_1, \ldots, s_N} m_{s_1 s_2} m_{s_2 s_3} \ldots m_{s_{N-1} s_N} m_{s_N s_1} = \mathrm{Tr}\big(\mathbf{m}^N\big). \tag{12}$$

La traza de $\mathbf{m}^N$ es

$$\mathrm{Tr}\big(\mathbf{m}^N\big) = \lambda_1^N + \lambda_2^N, \tag{13}$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de $\mathbf{m}$. Aquí uno podría dar por resuelto el problema.

Todo esto funciona. El problema de calcular la función de partición se reduce al problema de calcular los dos autovalores de una matriz de 2×2. Pero la matriz $\mathbf{m}$ tiene un inconveniente: no es simétrica. En otro tipo de cálculos, o si considerásemos la cadena con extremos abiertos, sería necesario conocer los elementos de $\mathbf{m}^N$, y no sólo su traza. La potencia N-ésima de una matriz se calcula más fácilmente cuando la matriz es simétrica.

Para ver cómo solucionar esto, escribamos una vez más el factor de Boltzmann,

$$e^{-\beta H(\{s\})} = e^{K s_1 s_2} e^{b s_1}\; e^{K s_2 s_3} e^{b s_2}\; e^{K s_3 s_4} e^{b s_3} \dots\; e^{K s_N s_1} e^{b s_N}. \tag{14}$$

El factor $e^{K s_1 s_2}$ es simétrico en s_1 y s_2. El problema es que, al construir $m_{s_1 s_2}$, definimos

$$m_{s_1 s_2} = e^{K s_1 s_2} e^{b s_1}, \tag{15}$$

lo que rompe la simetría. Si hubiéramos definido

$$m_{s_1 s_2} = e^{K s_1 s_2} e^{b(s_1+s_2)}, \tag{16}$$

habríamos obtenido un primer factor simétrico en s_1 y s_2, pero resultaría imposible que el factor siguiente fuera simétrico y de la misma forma,

$$e^{K s_2 s_3} e^{b(s_2+s_3)}, \tag{17}$$

porque el término $e^{b s_2}$ ya ha ido a parar al primer factor. Tenemos que hacer un reparto equitativo. La solución es escribir (14) como

$$e^{-\beta H(\{s\})} = e^{K s_1 s_2} e^{\frac{1}{2} b(s_1+s_2)}\; e^{K s_2 s_3} e^{\frac{1}{2} b(s_2+s_3)} \dots\; e^{K s_N s_1} e^{\frac{1}{2} b(s_N+s_1)}. \tag{18}$$

Ahora la matriz de transferencia es simétrica.

Existe una forma más sistemática de llegar a este resultado y que puede servir en problemas más difíciles. Lo esencial es observar que podríamos haber desarrollado el factor de Boltzmann empezando desde el otro extremo de la cadena. Es decir, tenemos dos alternativas: leer la cadena de izquierda a derecha o leerla de derecha a izquierda,

$$\begin{aligned} e^{-\beta H(\{s\})} &= e^{K s_1 s_2} e^{b s_1}\; e^{K s_2 s_3} e^{b s_2}\; e^{K s_3 s_4} e^{b s_3} \dots\; e^{K s_N s_1} e^{b s_N}, \\ e^{-\beta H(\{s\})} &= e^{K s_N s_{N-1}} e^{b s_N}\; e^{K s_{N-1} s_{N-2}} e^{b s_{N-1}} \dots\; e^{K s_2 s_1} e^{b s_2}\; e^{K s_1 s_N} e^{b s_1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Multiplicando estas dos expresiones,

$$\left[e^{-\beta H(\{s\})}\right]^2 = e^{2K s_1 s_2} e^{b(s_1+s_2)}\; e^{2K s_2 s_3} e^{b(s_2+s_3)} \dots\; e^{2K s_N s_1} e^{b(s_1+s_N)}. \tag{20}$$

Si ahora tomamos la raíz cuadrada, obtenemos nuevamente la expresión (18). Este método funciona para simetrizar la matriz de transferencia siempre que la cadena tenga simetría de reflexión. Para ver por qué funciona, supongamos que hemos podido escribir el factor de Boltzmann como un producto de elementos de cierta matriz,

$$e^{-\beta H(\{s\})} = m_{s_1 s_2} m_{s_2 s_3} \dots\ m_{s_{N-1} s_N} m_{s_N s_1}. \tag{21}$$

Si la cadena es simétrica, entonces también deber ser cierto que

$$e^{-\beta H(\{s\})} = m_{s_N s_{N-1}} m_{s_{N-1} s_{N-2}} \dots\ m_{s_2 s_1} m_{s_1 s_N}. \tag{22}$$

Multiplicando los dos desarrollos,

$$\left[e^{-\beta H(\{s\})}\right]^2 = (m_{s_1 s_2} m_{s_2 s_1})\,(m_{s_2 s_3} m_{s_3 s_2}) \dots\ \left(m_{s_{N-1} s_N} m_{s_N s_{N-1}}\right)(m_{s_N s_1} m_{s_1 s_N})\,. \tag{23}$$

Luego,

$$e^{-\beta H(\{s\})} = (m_{s_1 s_2} m_{s_2 s_1})^{1/2}\,(m_{s_2 s_3} m_{s_3 s_2})^{1/2} \dots\ \left(m_{s_{N-1} s_N} m_{s_N s_{N-1}}\right)^{1/2}(m_{s_N s_1} m_{s_1 s_N})^{1/2}\,. \tag{24}$$

Definiendo

$$q_{ss'} = (m_{ss'} m_{s's})^{1/2}\,, \tag{25}$$

queda

$$e^{-\beta H(\{s\})} = q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \dots\ q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}, \tag{26}$$

donde, evidentemente, $\mathbf{q}$ es simétrica.

Con la Ec. (18) a la vista, definimos la matriz de transferencia $\mathbf{q}$, que tiene elementos

$$q_{ss'} = e^{Kss'} e^{\frac{1}{2}b(s+s')}. \tag{27}$$

En forma matricial,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} e^{K+b} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-b} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Definiendo, a su vez,

$$x = e^{K}, \qquad y = e^{b}, \tag{29}$$

resulta

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} xy & x^{-1} \\ x^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

En términos de la matriz de transferencia, la probabilidad de una configuración $\{s\}$ es

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z_N}\, q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \dots q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}, \tag{31}$$

con

$$Z_N = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{q}^N\right) = \lambda_+^N + \lambda_-^N, \tag{32}$$

donde λ_+ y λ_- son los autovalores de la matriz $\mathbf{q}$. Así, todo el problema ha quedado reducido a resolver una ecuación cuadrática para los autovalores de una matriz simétrica de 2×2. La ecuación característica es

$$\lambda^2 - x\left(y + y^{-1}\right)\lambda + x^2 - x^{-2} = 0. \tag{33}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= \frac{1}{2}\left[x\left(y+y^{-1}\right) \pm \sqrt{x^2\left(y+y^{-1}\right)^2 - 4\left(x^2 - x^{-2}\right)}\right] \\ &= x\left[\frac{y+y^{-1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y-y^{-1}}{2}\right)^2 + x^{-4}}\right].\end{aligned} \tag{34}$$

Pero $x = e^K$ e $y = e^b$, de modo que, finalmente,

$$\lambda_\pm = e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right). \tag{35}$$

Recordemos que $K = \beta J$. Si $J > 0$, es fácil demostrar que los dos autovalores son positivos. Pero no está dicho que J deba ser positiva. Si J es negativa, λ_- puede ser negativo. Eso no es un problema en sí mismo.

Una de las magnitudes fundamentales que uno está interesado en calcular es la magnetización por espín,

$$\langle m \rangle_N = \mu \langle s \rangle_N. \tag{36}$$

Para la cadena cerrada, es indiferente calcular el valor medio de cualquier espín. Para la cadena abierta, existen efectos de borde, entonces hay que hacer un promedio sobre los valores medios de todos los espines:

$$\langle m \rangle_N = \frac{\mu}{N}\sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle. \tag{37}$$

En cualquier caso, lo que es inmediato calcular es, precisamente, esa suma. Puesto que

$$Z_N(K, b) = \sum_{\{s\}} e^{K s_1 s_2 + \ldots + K s_N s_1}\, e^{b(s_1 + \ldots + s_N)}, \tag{38}$$

el valor medio de la suma de los espines es

$$\sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle_N = \frac{\partial \log Z_N}{\partial b}. \tag{39}$$

Concentrémonos en el caso de la cadena cerrada. La función de partición es

$$Z_N(K, b) = \lambda_+^N + \lambda_-^N. \tag{40}$$

Luego,

$$\langle s \rangle_N = \frac{1}{N\left(\lambda_+^N + \lambda_-^N\right)} \frac{\partial}{\partial b}\left(\lambda_+^N + \lambda_-^N\right) = \frac{1}{\lambda_+^N + \lambda_-^N}\left(\lambda_+^{N-1}\frac{\partial \lambda_+}{\partial b} + \lambda_-^{N-1}\frac{\partial \lambda_-}{\partial b}\right). \tag{41}$$

A partir de la Ec. (35),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_\pm}{\partial b} &= e^K\left(\sinh b \pm \frac{\sinh b\ \cosh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\right) \\ &= \frac{e^K \sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\left(\pm\cosh b + \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right) \\ &= \pm\frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\,\lambda_\pm. \end{aligned} \tag{42}$$

Entonces,

$$\langle s \rangle_N = \left(\frac{\lambda_+^N - \lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N}\right)\frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}. \tag{43}$$

Importa calcular el límite de este valor medio cuando $N \to \infty$. Este límite va a depender de cuál de los dos autovalores es mayor en valor absoluto. Si $K > 0$, es claro que $\lambda_+ > \lambda_- > 0$. Si $K < 0$, ya no es tan claro que $\lambda_+ > |\lambda_-|$, pero pueden demostrar que sigue siendo cierto. Esto significa que

$$\langle s \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \langle s \rangle_N = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}. \tag{44}$$

El siguiente límite que queremos considerar es el límite de esta expresión cuando $B \to 0^+$. Hay que analizar por separado el caso $T = 0$. Si $T = 0$ y $J > 0$, teniendo en cuenta que $b = \beta\mu B$ y que hemos asumido que $\mu > 0$,

$$\lim_{T\to 0} \langle s \rangle = \lim_{T\to 0} \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} = \operatorname{signo} B. \tag{45}$$

Si ahora tomamos el límite $B \to 0^+$,

$$\langle s \rangle = 1. \tag{46}$$

Esto quiere decir que en $T = 0$ el sistema tiene magnetización espontánea. El resultado no es muy sorprendente, porque si $J > 0$, el estado con todos los espines alineados es el que tiene menor energía. En cambio, si $J < 0$, cuando $T = 0$,

$$\lim_{T\to 0} \langle s \rangle = \lim_{T\to 0} \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} = \begin{cases} \text{signo}\, B, & \text{si } \mu|B| > 2|J|; \\ 0, & \text{si } \mu|B| < 2|J|. \end{cases} \tag{47}$$

En todo caso, si ahora tomamos el límite $B \to 0^+$, encontramos que

$$\langle s \rangle \to 0. \tag{48}$$

Lo que tampoco debería resultar sorprendente, puesto que, si $J < 0$, el estado de mínima energía es aquel que tiene espines alternados.

Veamos ahora qué pasa cuando $T > 0$ y tomamos el límite $B \to 0^+$ en la expresión (44). El resultado es un poco decepcionante:

$$\lim_{B\to 0^+} \langle s \rangle = \lim_{B\to 0^+} \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} = 0. \tag{49}$$

Esto significa que no hay magnetización espontánea. El sistema de la cadena lineal no tiene una transición de fase.

Para terminar, escribamos la energía libre por espín en el límite $N \to \infty$,

$$-\beta \lim_{N\to\infty} \frac{F}{N} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \log Z_N \right) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N} \log \left(\lambda_+^N + \lambda_-^N \right) \right]. \tag{50}$$

Debido a que $\lambda_+ > |\lambda_-|$, el límite está dominado por λ^+,

$$\begin{aligned} -\beta \lim_{N\to\infty} \frac{F}{N} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log\left[\lambda_+^N \left(1 + \frac{\lambda_-^N}{\lambda_+^N} \right) \right] = \log \lambda_+ + \lim_{N\to\infty} \log\left(1 + \frac{\lambda_-^N}{\lambda_+^N} \right) \\ &= \log \lambda_+. \end{aligned} \tag{51}$$

■ **Problema 5**: **Correlaciones 2**. En el problema 1 calculamos el valor medio de la magnetización tomando una derivada adecuada del logaritmo de la función de partición. En el problema 4 hicimos algo parecido para calcular los valores de expectación $\langle s_i s_{i+j} \rangle$ para una cadena abierta sin campo. El problema ahora es calcular la función de correlación

$$G(i, i+j) = \langle s_i s_{i+j} \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_{i+j} \rangle, \tag{52}$$

para una cadena cerrada y con campo. Las estrategias que usamos en los otros problemas ahora no funcionan. La idea es calcular valores medios directamente a partir de la distribución de probabilidades.

a) Para empezar, demuestre que el valor medio de s_1 es

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \sum_{s_1} s_1 \left(\mathsf{q}^N \right)_{s_1, s_1}. \tag{53}$$

b) Para poder hacer la suma, necesitará los elementos de matriz de $\mathbf{q}^N$. Si los autovectores normalizados correspondientes a λ_+ y λ_- son $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, demuestre que

$$\mathbf{q}^k = \lambda_+^k \, \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \lambda_-^k \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}. \tag{54}$$

El objeto $\boldsymbol{AB}$, llamado diada, frecuente en mecánica clásica y en electromagnetismo, tiene el siguiente significado operacional:

$$\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{AB}) = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{A})\mathbf{B}, \qquad (\boldsymbol{AB}) \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}). \tag{55}$$

La ventaja de usar diadas, es que no es necesario introducir la matriz que diagonaliza a la matriz de transferencia $\mathbf{q}$.

c) Como se trata de vectores ortonormales en el plano, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ deben poder escribirse como $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ y $\boldsymbol{v} = (\sin\varphi, -\cos\varphi)$. Demuestre que $\cot 2\varphi = e^{2K} \sinh b$.

d) Reuniendo todos estos resultados, calcule el valor medio (53) explícitamente y verifique que se obtiene el resultado del problema 1.

e) Del mismo modo, calcule el valor medio $\langle s_1 s_n \rangle$ y $G(i, i+j)$.

f) Muestre que, cuando $N \to \infty$,

$$G(i, i+j) = \sin^2 2\varphi \, \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^j . \tag{56}$$

g) Encuentre la longitud de correlación como función de K y b.

■ **Solución**. La distribución de probabilidad de los N espines es

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z_N} \, e^{K(s_1 s_2 + \ldots + s_N s_1)} e^{b(s_1 + \ldots + s_N)}. \tag{57}$$

Introduciendo la matriz de transferencia $\mathbf{q}$, con componentes $\mathbf{q}_{ss'} = e^{Kss' + \frac{1}{2} b(s+s')}$, queda

$$P(\{s\}) = \frac{1}{Z_N} \, q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \ldots q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}. \tag{58}$$

Explícitamente, la matriz $\mathbf{q}$ es

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} e^{K+b} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-b} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Conviene definir $x = e^K$ e $y = e^b$, de modo que

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} xy & x^{-1} \\ x^{-1} & xy^{-1}. \end{pmatrix}. \tag{60}$$

La idea del problema es no usar el resultado del problema 1 para calcular valores medios, sino la definición directa en términos probabilísticos:

$$\langle s_i s_j \ldots s_k \rangle = \sum_{\{s\}} s_i s_j \ldots s_k \, P(\{s\}) = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s\}} s_i s_j \ldots s_k \, q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \ldots q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}. \tag{61}$$

Por ejemplo, para calcular el valor medio del primer espín, debemos escribir

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s\}} s_1 q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \ldots q_{s_{N-1} s_N} q_{s_N s_1}. \tag{62}$$

Podemos hacer de manera inmediata todas las sumas salvo la suma sobre s_1,

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1} s_1 \left(\mathbf{q}^N \right)_{s_1 s_1}. \tag{63}$$

Cuando calculamos la función de partición en el problema 1, lo único que necesitamos encontrar fueron los autovalores de la matriz $\mathbf{q}$. Ahora eso es insuficiente. Es necesario conocer las componentes diagonales de la matriz $\mathbf{q}^N$.

Recordemos que los autovalores de la matriz $\mathbf{q}$ son

$$\lambda_\pm = e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}} \right). \tag{64}$$

Supongamos que los autovectores normalizados son $\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{v}$. La matriz $\mathbf{q}$ puede escribirse en notación de diadas como

$$\mathbf{q} = \lambda_+ \, \mathbf{u}\mathbf{u} + \lambda_- \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}. \tag{65}$$

Para demostrar que esto es cierto, es suficiente mostrar que este operador aplicado sobre dos vectores linealmente independientes da los resultados correctos. En particular,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \lambda_+ \, \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \lambda_- \, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u}) = \lambda_+ \, \mathbf{u}, \tag{66}$$

y del mismo modo $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda_- \, \boldsymbol{v}$. De forma que el operador (65) es, en efecto, la matriz de transferencia de partida. Ahora bien, esta manera de escribir $\mathbf{q}$ tiene la ventaja de que es muy fácil calcular sus potencias. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} &= (\lambda_+ \, \mathbf{u}\mathbf{u} + \lambda_- \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) \cdot (\lambda_+ \, \mathbf{u}\mathbf{u} + \lambda_- \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) \\
&= \lambda_+^2 \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \lambda_+ \lambda_- \left[\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \right] + \lambda_-^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \\
&= \lambda_+^2 \, \mathbf{u}\mathbf{u} + \lambda_-^2 \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{67}$$

En general,

$$\mathbf{q}^k = \lambda_+^k \, \mathbf{u}\mathbf{u} + \lambda_-^k \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}. \tag{68}$$

No es necesario introducir la matriz que diagonaliza $\mathbf{q}$.

Entonces, tenemos una forma de calcular $\mathbf{q}^N$. Lo que nos falta averiguar son los autovectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. Empecemos escribiendo las ecuaciones que determinan los autovectores sin normalizar. Llamémoslos $\mathbf{V}_\pm$. Fijando la primera componente igual a 1,

$$\mathbf{V}_\pm = (1, \alpha_\pm), \tag{69}$$

debe ser

$$xy - \lambda_\pm + \alpha_\pm x^{-1}. \tag{70}$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \alpha_\pm = x\,(\lambda_\pm - xy) &= e^K\left[e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right) - e^K e^b\right] \\ &= -e^{2K}\sinh b \pm \sqrt{1 + (e^{2K}\sinh b)^2}. \end{aligned} \tag{71}$$

Los autovectores sin normalizar son

$$\mathbf{V}_\pm = \left(1, -z \pm \sqrt{1+z^2}\right), \tag{72}$$

donde

$$z = e^{2K}\sinh b. \tag{73}$$

Debido a que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores ortonormales en el plano, tiene que ser posible escribirlos en términos de cierto ángulo φ,

$$\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \boldsymbol{v} = (\sin\varphi, -\cos\varphi). \tag{74}$$

Los autovectores sin normalizar son suficientes para calcular la tangente de φ, porque sólo depende del cociente de las componentes,

$$\tan\varphi = \alpha_+ = -\frac{1}{\alpha_-}. \tag{75}$$

Es decir,

$$\tan\varphi = -z + \sqrt{1+z^2}. \tag{76}$$

A partir de aquí podría avanzarse din dificultad. Sin embargo, es posible encontrar una relación más sencilla entre φ y z. Si despejamos z de la ecuación anterior,

$$z = \frac{1-\tan^2\varphi}{2\tan\varphi}. \tag{77}$$

Ahora bien, la tangente del ángulo doble está dada por

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}. \tag{78}$$

Luego,

$$z = \cot 2\varphi, \tag{79}$$

lo que resulta notablemente más sencillo que la Ec. (76).

Volvamos a la Ec. (63),

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1} s_1 \left(\mathbf{q}^N \right)_{s_1 s_1}. \tag{80}$$

La suma sobre s_1 es

$$\begin{aligned} \sum_{s_1} s_1 \left(\mathbf{q}^N \right)_{s_1 s_1} &= \left(\lambda_+^N \cos^2 \varphi + \lambda_-^N \sin^2 \varphi \right) - \left(\lambda_+^N \sin^2 \varphi + \lambda_-^N \cos^2 \varphi \right) \\ &= \left(\lambda_+^N - \lambda_-^N \right) \cos 2\varphi. \end{aligned} \tag{81}$$

Finalmente,

$$\langle s_1 \rangle = \left(\frac{\lambda_+^N - \lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \right) \cos 2\varphi. \tag{82}$$

Para compararlo con el resultado del problema 1, escribamos

$$\cos 2\varphi = \frac{\cot 2\varphi}{\sqrt{1 + \cot^2 2\varphi}} = \frac{e^{2K} \sinh b}{\sqrt{1 + e^{4K} \sinh^2 b}} = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}. \tag{83}$$

En el problema 1 habíamos obtenido

$$\langle s \rangle = \left(\frac{\lambda_+^N - \lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \right) \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}. \tag{84}$$

En verdad, ambos resultados coinciden.

Esto fue sólo una preparación para calcular $G(i, i+j)$,

$$G(i, i+j) = \langle s_i s_{i+j} \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_{i+j} \rangle. \tag{85}$$

Debido a que la cadena tiene invariancia de traslación, basta con calcular

$$G(1, n) = \langle s_1 s_n \rangle - \langle s \rangle^2. \tag{86}$$

Antes ya hemos calculado $\langle s \rangle$. Lo que queda por resolver es

$$\langle s_1 s_n \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1, s_n} s_1 q_{s_1 s_2} \ldots\ q_{s_{n-1} s_n} s_n q_{s_n s_{n+1}} \ldots\ q_{s_N s_1}. \tag{87}$$

Excepto las sumas sobre s_1 y s_n, las otras sumas son inmediatas:

$$\langle s_1 s_n \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1 s_n} s_1 \left(\mathbf{q}^{n-1}\right)_{s_1 s_n} s_n \left(\mathbf{q}^{N-n+1}\right)_{s_n s_1}. \tag{88}$$

Usando el resultado (68),

$$\begin{aligned}
\langle s_1 s_n \rangle &= \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1, s_n} s_1 s_n \left(\lambda_+^{n-1}\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \lambda_-^{n-1}\, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\right)_{s_1 s_n} \left(\lambda_+^{N-n+1}\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \lambda_-^{N-n+1}\, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\right)_{s_1 s_n} \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{s_1, s_n} s_1 s_n \Bigg\{ \lambda_+^N \left[(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})_{s_1 s_n}\right]^2 + \lambda_-^N \left[(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})_{s_1 s_n}\right]^2 \\
&\qquad + \left[\lambda_-^N \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{n-1} + \lambda_+^N \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{n-1}\right] (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})_{s_1 s_n} (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})_{s_1 s_n} \Bigg\} \\
&= \frac{1}{Z_N} \left\{ (\lambda_+^N + \lambda_-^N) \cos^2 2\varphi + \left[\lambda_-^N \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{n-1} + \lambda_+^N \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{n-1}\right] \sin^2 2\varphi \right\}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Luego,

$$G(i, i+j) = \left[1 - \left(\frac{\lambda_+^N - \lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N}\right)^2\right] \cos^2 2\varphi + \left[\lambda_-^N \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^j + \lambda_+^N \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^j\right] \frac{\sin^2 2\varphi}{\lambda_+^N + \lambda_-^N}. \tag{90}$$

Cuando $N \to \infty$,

$$G(i, i+j) = \sin^2 2\varphi \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^j. \tag{91}$$

Para comparar con el resultado del problema 4, consideremos el caso en el que el campo externo es nulo,

$$\cot 2\varphi = e^{2K} \sinh b = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tfrac{1}{4}\pi, \tag{92}$$

y, además,

$$\lambda_\pm = e^K \left(1 \pm e^{-2K}\right). \tag{93}$$

Entonces,

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \tanh K. \tag{94}$$

La función de correlación es

$$G(i, i+j) = (\tanh K)^j = e^{-j/\xi}, \tag{95}$$

donde

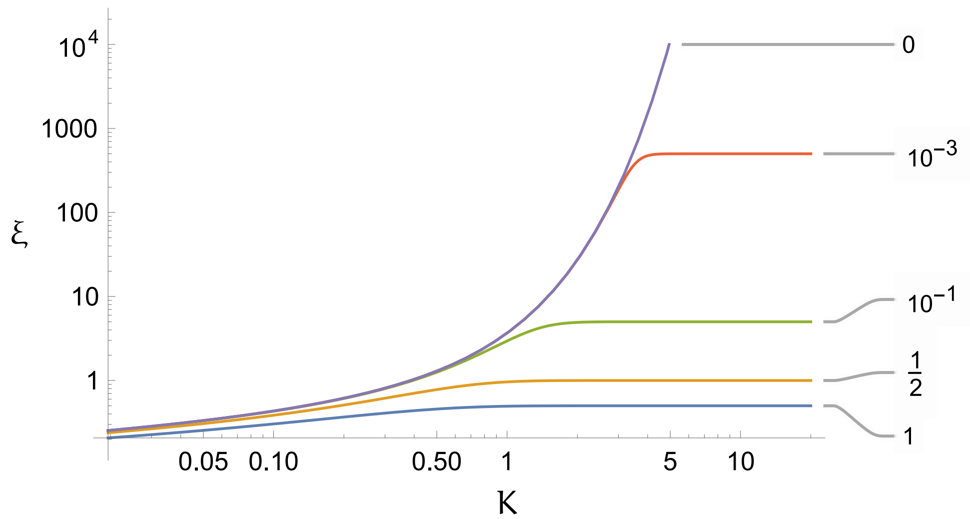
$$\xi = \frac{1}{\log(\coth K)}. \tag{96}$$

Si resolvieron el problema 4, verán que llegamos al mismo resultado.

En general, si $K > 0$,

$$\xi(K, b) = \left[\log\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)\right]^{-1}. \tag{97}$$

Intuitivamente, uno debería esperar que un campo externo de magnitud creciente borre las correlaciones entre los espines, porque el acoplamiento entre espines en algún momento se volverá despreciable frente al acoplamiento entre los espines y el campo. La longitud de correlación debe disminuir al aumentar el campo externo. En todo caso, la longitud de correlación debería aumentar con K. La figura muestra el gráfico de $\xi(K, b)$ en función de K para distintos valores de b. Notar que las dos escalas son logarítmicas.



Para lo que no tengo una explicación intuitiva es para el hecho de que la longitud de correlación, para campo externo no nulo, no aumente indefinidamente al aumentar K.

En todo lo anterior, hemos asumido que $K > 0$. Si $K < 0$, el autovalor λ_- puede ser negativo. Entonces es necesario modificar la definición de la longitud de correlación para contemplar este caso:

$$\xi(K, b) = \left[\log\left(\frac{\lambda_+}{|\lambda_-|}\right)\right]^{-1}. \tag{98}$$