Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2024

Segundo parcial – 8/7

■ **1**. Considere un gas ideal de N electrones en una **trampa armónica** tridimensional de frecuencia ω en el límite termodinámico. La temperatura es cero. Los electrones interactúan con un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$. La energía de interacción es $\epsilon_s = s\mu_e B$, donde s es el signo de la proyección del espín en la dirección $\hat{z}$ y μ_e es el valor absoluto del momento magnético de los electrones. Es válido aplicar la aproximación semiclásica.

a) Escriba la ecuación que determina la energía de Fermi como función de N, ω y B.

b) Calcule la magnetización por partícula, M, en función de la energía de Fermi, N, ω y B.

c) Calcule la susceptibilidad, es decir, la derivada de M respecto de B cuando B tiende a cero. El resultado debe quedar escrito únicamente en términos de la energía de Fermi.

Ayuda: $\int_0^\infty dx\, \Theta(b-x) f(x) = \Theta(b) \int_0^b dx\, f(x)$.

■ **2**. Un gas ideal de N bosones de masa m y espín cero está atrapado en una región bidimensional de largo a y altura ℓ. Hay un campo gravitatorio uniforme con aceleración g en la dirección vertical. Es válido aplicar la aproximación semiclásica. Se define $\alpha = \beta m g \ell$.

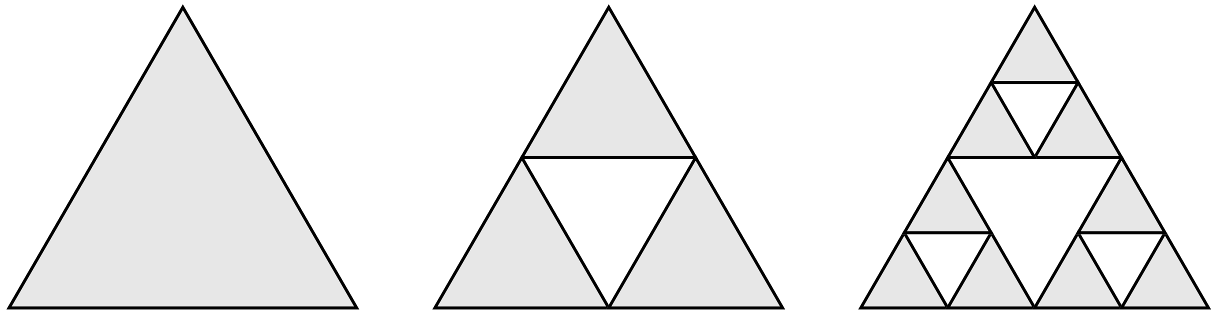
a) Calcule el logaritmo de la función de partición en el ensamble gran canónico.

b) Muestre que, en el límite termodinámico, este sistema tiene una transición de fase y escriba la ecuación que determina la temperatura crítica.

c) Calcule la energía como función de la temperatura y de la fugacidad.

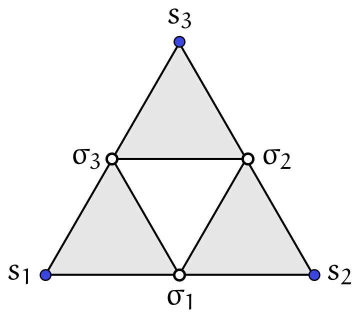
Ayuda: resuelva primero la integral en el impulso.

■ **3**. Una red de Ising se construye iterativamente de acuerdo al siguiente algoritmo: la red de nivel $n = 0$ es un triángulo equilátero, como en la figura de la izquierda. En la primera iteración, para formar la red de nivel $n = 1$, se toma el punto medio de cada lado del triángulo original y se construyen tres nuevos triángulos, como en la figura central. En la segunda iteración, para formar la red de nivel $n = 2$, se toma cada uno de los tres triángulos sombreados y se les aplica el procedimiento del paso anterior, como en la figura de la derecha; y así sucesivamente.



$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$ $\qquad$ $n = 2$

En cada vértice hay un espín. La red de nivel $n > 0$ es un agregado de 3^{n-1} elementos de la forma



donde los espines σ_i son los últimos en haber sido incorporados a la red. La energía de interacción entre espines vecinos es

$$\epsilon(s, s') = -Jss'.$$

Se define $K = \beta J$.

a) Muestre que, si en la red de nivel n se eliminan de la descripción los espines σ, los pares de vecinos resultantes interactúan de manera efectiva a través de un término que tiene la misma forma que la interacción original, pero con un acoplamiento renormalizado $\bar{K}$. Escriba $\bar{K}(K)$.

b) Encuentre una relación de recurrencia para la función de partición, de la forma:

$$Z^{(n)}(K) = \alpha_n(K)\, Z^{(n-1)}(\bar{K}).$$

c) Calcule la función de partición de la red de nivel $n = 2$. La expresión que obtenga se tiene que poder evaluar con una calculadora.

Ayuda: escriba $\bar{K}$ y α_n de manera compacta en términos de dos funciones de K, de forma que

$$\bar{K} = \log \frac{A(K)}{B(K)}.$$