Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2023

Guía 2: algunos problemas de probabilidades

■ **El problema del cumpleaños**. En un aula hay n personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es 1/365, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad p_n de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad p_n supere el 50%? Tome por asalto una computadora y grafique p_n.

■ Numeremos a las personas de 1 a n. El número total de maneras en las que podemos distribuir las fechas de sus cumpleaños es

$$N_n = 365^n. \tag{1}$$

Por hipótesis, cada una de estas asignaciones tiene la misma probabilidad. Se trata de contar aquellas para las que al menos dos personas cumplan años el mismo día. La solución directa de este problema es complicada. Más simple es contar los casos que pertenecen al complemento de ese evento. Es decir, contar todas las formas posibles en las que dos personas nunca cumplen años el mismo día. Llamemos M_n a este número. Si $n = 1$, hay 365 maneras de asignarle fecha de cumpleaños a la única persona, $M_1 = 365$. Si $n = 2$, a la primera persona podemos asignarle cualquiera de los 365 días, mientras que a la segunda persona sólo podemos asignarle alguno de los 364 días restantes, de manera que $M_2 = 365 \times 364$. Es fácil ver que, mientras $n \leqslant 365$,

$$M_n = 365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}. \tag{2}$$

Si n es mayor que 365, entonces, por el principio del palomar, $M_n = 0$. Por lo tanto, la probabilidad de que ninguna de las n personas cumpla años el mismo día es

$$q_n = \frac{M_n}{N_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{365^n}\dfrac{365!}{(365-n)!}, & \text{si } n \leqslant 365; \\[2ex] 0, & \text{si } n > 365. \end{cases} \tag{3}$$

Estamos interesados en el evento complementario, ya que o bien todas las personas cumplen años en días distintos, o bien hay por lo menos dos personas que cumplen años el mismo día. La probabilidad de que al menos dos personas cumplan años el mismo día es

$$p_n = 1 - q_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{365^n}\dfrac{365!}{(365-n)!}, & \text{si } n \leqslant 365; \\[2ex] 1, & \text{si } n > 365. \end{cases} \tag{4}$$

Esta función al principio crece lentamente con n, pero después lo hace de manera más o menos lineal, y satura para $n \gtrsim 60$. La tabla siguiente muestra los primeros valores.

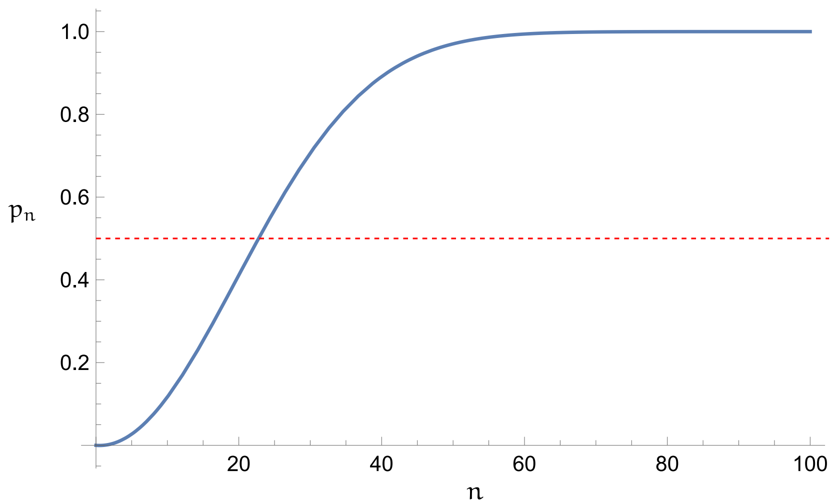
n	p_n
1	0
2	0.0027
3	0.0082
4	0.016
5	0.027
6	0.040
7	0.056
8	0.074
9	0.095
10	0.12

n	p_n
11	0.14
12	0.17
13	0.19
14	0.22
15	0.25
16	0.28
17	0.32
18	0.35
19	0.38
20	0.41

n	p_n
21	0.44
22	0.48
23	0.51
24	0.54
25	0.57
26	0.60
27	0.63
28	0.65
29	0.68
30	0.71

n	p_n
40	0.8912
50	0.9704
60	0.9941
70	0.9992
80	0.99991
90	0.999994
100	0.9999997
110	0.99999999
120	0.9999999998
130	0.999999999996

Cuando $n = 23$, la probabilidad supera el 50%. Más ilustrativo es el gráfico de la función p_n, considerada como función de la variable real n. Graficamos en el intervalo entre 0 y 100 porque más allá de 100 el gráfico de la función es indistinguible de la función igual a 1.



■ **Falso positivo**. Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal, asintomática, hasta que la cabeza explota. Es una enfermedad extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 100 millones de personas. Por suerte se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, El Laboratorio que fabrica el test recomienda aplicar el test a toda la población. "Además", argumenta desinteresadamente, "el test es 99,9999% *infalible*" (las itálicas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). O sea, ¡uno en un millón de que el test falle! ¿No es como decir que el test es perfecto? ¿Quién no apostaría a que el resultado del test está en lo cierto?

a) Pues bien. Usted se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ya mismo dejar todos sus asuntos en orden y a cubrirse la cabeza con una Bolsa®, que también comercializa El Laboratorio? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?

b) Si el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?

c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

■ Se trata de una aplicación del teorema de Bayes. Representemos con las letras **E** y **S** los estados en donde la persona está enferma o sana, respectivamente. Con los símbolos "+" y "−" representemos el resultado positivo o negativo de un test. Dándole la categoría de probabilidades a los datos estadísticos, lo que sabemos es que

$$\begin{cases} p(\mathbf{E}) = p = 10^{-8}, \\ p(\mathbf{S}) = 1 - p = 1 - 10^{-8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p(+|\mathbf{S}) = f = 10^{-6}, \\ p(-|\mathbf{E}) = n = 10^{-6}, \\ p(-|\mathbf{S}) = 1 - f = 1 - 10^{-6}, \\ p(+|\mathbf{E}) = 1 - n = 1 - 10^{-6}. \end{cases} \tag{5}$$

Aquí hemos usado las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} p(\mathbf{E}) + p(\mathbf{S}) = 1, \\ p(+|\mathbf{S}) + p(-|\mathbf{S}) = 1, \\ p(+|\mathbf{E}) + p(-|\mathbf{E}) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Lo que pregunta el primer ítem es la probabilidad de que una persona (usted) esté sana si el test le dio positivo. Notar que el dato no es ese. El dato es la probabilidad de que el test dé positivo en una persona sana. Aplicando el teorema de Bayes tenemos

$$p(\mathbf{S}|+) = \frac{p(+|\mathbf{S})p(\mathbf{S})}{p(+)} = \frac{f(1-p)}{p(+)}. \tag{7}$$

Lo único que no conocemos en el lado derecho de esta ecuación es $p(+)$. Pero podemos escribir esta probabilidad en términos de los datos:

$$p(+) = p(+|\mathbf{S})\; p(\mathbf{S}) + p(+|\mathbf{E})\; p(\mathbf{E}) = f(1-p) + (1-n)p. \tag{8}$$

Luego,

$$p(\mathbf{S}|+) = \frac{f(1-p)}{f(1-p) + (1-n)p}. \tag{9}$$

De manera análoga, la probabilidad de que uno esté enfermo si el test le da negativo es

$$p(\mathbf{E}|-) = \frac{np}{np + (1-f)(1-p)}. \tag{10}$$

Estas son las fórmulas generales que pide el último ítem del problema.

Las tres probabilidades p, f y n son números pequeños. De manera que podemos aproximar las expresiones anteriores por

$$p(\mathbf{S}|+) \approx \frac{f}{f+p}, \qquad p(\mathbf{E}|-) \approx np. \tag{11}$$

A su vez, $p \ll f$. Entonces,

$$p(\mathbf{S}|+) \approx 1 - \frac{p}{f} = 1 - 10^{-2} = 0.99. \tag{12}$$

Por otro lado,

$$p(\mathbf{E}|-) \approx 10^{-14}. \tag{13}$$

La probabilidad de estar sano si el test dio positivo es entonces aproximadamente igual al 99%, lo que no es tan alarmante como parece sugerir la supuesta infalibilidad del test.

Como caso extremo, supongamos que la enfermedad es una *fake news* de El Laboratorio. Evidentemente, la probabilidad de estar sano habiendo el test dado positivo tendría que ser uno, no importa qué tan infalible sea el test, siempre que $f > 0$. En efecto, si evaluamos el resultado (9) para $p = 0$ obtenemos

$$p(\mathbf{S}|+) = 1. \tag{14}$$

Es posible entender intuitivamente por qué, aunque el test tenga una baja probabilidad de fallar, el hecho de que dé positivo no implica que la persona tenga la enfermedad. Para simplificar las cosas, supongamos que en este momento hay 10 000 millones de personas. El número de personas enfermas será aproximadamente $N = 10^{10}p = 100$. Como la abrumadora mayoría de las personas están sanas, si todas las personas se hicieran el test prácticamente la totalidad de tests positivos corresponderán a falsos positivos. El número de tests positivos será entonces aproximadamente igual a $P = 10^{10}f = 10^4$. Por lo tanto, la probabilidad de que una persona a la que el test le haya dado positivo esté enferma es aproximadamente igual a

$$p(\mathbf{E}|+) \approx \frac{N}{P} = \frac{100}{10^4} = 10^{-2}, \tag{15}$$

que es lo mismo que decir que

$$p(\mathbf{S}|+) \approx 1 - \frac{100}{10^4} = 0.99, \tag{16}$$

tal como obtuvimos antes.

■ **Problème des rencontres.** Hay n objetos distintos, dispuestos en n lugares diferentes según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad p_n de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones de n elementos que no dejan ningún elemento en su posición original. Los ordenamientos que tienen esta propiedad se llaman *desarreglos*. El número de desarreglos de n elementos suele llamarse subfactorial y notarse con los símbolos $!n$ o d_n. Resulta complicado contar directamente el número de desarreglos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí. En particular, en este problema se usa el método de la función generatriz.

a) Considere los casos $n = 1, 2, 3$ y 4. Encuentre los valores correspondientes de d_n.

b) Demuestre que, en general, d_n satisface la siguiente relación de recurrencia

$$d_n = (n-1)\left(d_{n-1} + d_{n-2}\right). \tag{17}$$

c) Muestre que, en términos de las probabilidades, la ecuación anterior implica

$$np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}. \tag{18}$$

d) A partir de esta relación de recurrencia, extienda la definición de p_n para todo n entero. ¿Cuánto vale p_0? ¿Cuánto vale p_n con $n < 0$?

e) Defina la función generatriz

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n x^n \tag{19}$$

y transforme la relación de recurrencia para p_n en una ecuación diferencial para $F(x)$.

f) Resuelva la ecuación diferencial para $F(x)$. La condición inicial puede determinarse calculando explícitamente $F(0)$.

g) Desarrollando $F(x)$ en potencias de x, encuentre p_n.

h) Muestre que $p_n \to e^{-1}$ cuando $n \to \infty$. Para ver qué tan rápida es la convergencia, grafique p_n.

■ La probabilidad de cada permutación es $1/n!$. Para calcular la probabilidad buscada, hay que contar el número d_n de desarreglos. Luego, $p_n = d_n/n!$. La idea es encontrar una relación de recurrencia para d_n. Usemos las letras A, B, C, ... para distinguir a los elementos. Supongamos que el orden original es

$$A \;\; B \;\; C \;\; \ldots \tag{20}$$

Para tener un desarreglo, A no debe ir a parar al sitio 1, B no debe ir a parar al sitio 2, etc. Para contar el número de desarreglos, no tiene mayor importancia a cuál sitio no puede ir a parar cada elemento. Lo importante es que cada elemento tiene un lugar prohibido. Así, sería lo mismo contar las permutaciones en las que A no puede ir al sitio 2, B no puede ir al sitio 1, etc., siempre que haya una asignación uno a uno entre sitios prohibidos y elementos. Esta observación va a ser importante más adelante.

Una buena estrategia en los problemas de combinatoria es analizar casos simples. Supongamos, por ejemplo, que tenemos cuatro elementos, A, B, C y D. Tratemos de contar el número de desarreglos. Sería tedioso escribir todas las permutaciones e identificar los desarreglos. Ensayemos un método más sistemático que nos evite escribir las 24 permutaciones posibles. Consideremos el elemento A. Este elemento debe ir a parar al sitio ocupado por B, C o D. Supongamos que va a parar al sitio ocupado por B. Gráficamente, el primer movimiento sería

$$\mathrm{A\ \ B\ \ C\ \ D} \quad \rightarrow \quad \_\ \ \overset{\mathrm{B}}{\boxed{\mathrm{A}}}\ \ \mathrm{C\ \ D} \tag{21}$$

La posición final del elemento B está mantenida en suspenso. Con un recuadro indicamos que el elemento A ya es inamovible. Ahora pueden pasar dos cosas: i) B va al lugar que ocupaba A, ii) B va a cualquier otro lugar salvo al que ocupaba A (y, por supuesto, al que ocupaba B originalmente). Consideremos cada alternativa separadamente.

i) En el primer caso,

$$\_\ \ \overset{\mathrm{B}}{\boxed{\mathrm{A}}}\ \ \mathrm{C\ \ D} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathrm{B}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \ \mathrm{C\ \ D} \tag{22}$$

Los elementos A y B ya son inamovibles. Resta desarreglar los elementos C y D, lo que puede hacerse de una sola manera, porque hay una sola manera de desarreglar dos elementos:

$$\boxed{\mathrm{B}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \ \mathrm{C\ \ D} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathrm{B}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \boxed{\mathrm{D}}\ \boxed{\mathrm{C}} \tag{23}$$

Esto agota todas las posibilidades en las que los elementos A y B son transpuestos entre sí. Lo que limita el número de desarreglos en este caso es que $d_2 = 1$.

ii) Consideremos ahora el caso en el que A ocupa el lugar de B pero B no pasa a ocupar el lugar de A. Como A ya es inamovible, tenemos tres sitios libres

$$\_\ \ \boxed{\mathrm{A}}\ \ \_\ \ \_ \tag{24}$$

y tres elementos para acomodar, B, C y D, sujetos a las condiciones de que B no puede ir a parar al primer sitio libre, C no puede ir a parar al segundo y D no puede ir a parar al tercero. Esto es equivalente a tener la siguiente configuración inicial

$$\mathrm{B}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \mathrm{C}\ \ \mathrm{D} \tag{25}$$

y a preguntarnos por las maneras de desarreglar B, C y D. Para tres elementos es fácil ver que hay sólo dos desarreglos,

$$\mathrm{B}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \mathrm{C}\ \ \mathrm{D}\ \ \rightarrow \begin{cases} \boxed{\mathrm{C}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \boxed{\mathrm{D}}\ \boxed{\mathrm{B}} \\ \\ \boxed{\mathrm{D}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \boxed{\mathrm{B}}\ \boxed{\mathrm{C}} \end{cases} \tag{26}$$

Lo que limita en este caso el número de desarreglos es que $d_3 = 2$.

Lo que hemos visto es que si A va al lugar ocupado por B, el número de desarreglos es igual al número de desarreglos de dos elementos más el número de desarreglos de tres elementos. El total de desarreglos cuando A va al lugar ocupado por B es entonces $d_2 + d_3$. Ahora bien, A tiene tres lugares disponibles, no sólo el lugar de B. De modo que el número total de desarreglos de cuatro elementos será

$$d_4 = 3(d_2 + d_3) = 9. \tag{27}$$

La generalización de este algoritmo para cualquier $n \geqslant 4$ es inmediata. En cada uno de los desarreglos, el elemento A va a parar a alguno de los $n-1$ lugares permitidos. Por ejemplo, si A va a parar al lugar de B

$$\mathrm{A\ B\ C}\ \ldots\ \ \rightarrow\ \ \_\boxed{\mathrm{A}}\_\ \_\ \ldots \tag{28}$$

Ahora hay dos posibilidades. El elemento B puede ir a parar al lugar que ocupaba A o puede ir a parar a cualquier otro lugar salvo al que ocupaba A o al que ocupaba originalmente. Si se da el primer caso, obtenemos algo de la forma

$$\mathrm{A\ B\ C}\ \ldots\ \ \rightarrow\ \ \boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{A}}\_\ \_\ \ldots \tag{29}$$

Una vez que transpusimos A con B, quedan $n-2$ elementos para permutar. Si ningún elemento debe quedar en su lugar original, entonces tendremos d_{n-2} casos posibles.

Esto da cuenta del primer caso, en el que A y B se transponen entre sí. Pasemos a analizar el otro caso, en el que B no va a parar al lugar que ocupaba A. Ahora viene la observación crucial. Si A va al lugar de B, pero B no va al lugar de A, tenemos que reordenar los $n-1$ elementos B, C, D, $\ldots$ en $n-1$ sitios, con la condición de que B no vaya al lugar que originalmente ocupaba A, C no vaya al lugar de C, D no vaya al lugar de D, etc. Pero esto es equivalente a permutar $n-1$ elementos con la restricción de que cada uno no puede ir a parar a cierto lugar en particular. El número de estas permutaciones es d_{n-1}. Lo que importa no es a cuál sitio no puede ir tal elemento, sino el hecho de que cada elemento tiene un sitio prohibido.

Resumiendo: en cada desarreglo, A va a parar a uno de $n-1$ lugares posibles, digamos, al que ocupaba el elemento X. Si simplemente A se transpone con el elemento X, hay d_{n-2} permutaciones permitidas para el resto de los elementos. Si X no va al lugar de A, entonces hay d_{n-1} permutaciones permitidas. En definitiva,

$$d_n = (n-1)\left(d_{n-1} + d_{n-2}\right). \tag{30}$$

Para traducir la relación (30) a una relación entre las probabilidades, usemos que

$$p_n = \frac{d_n}{n!}, \tag{31}$$

de modo que

$$n!\, p_n = (n-1)(n-1)!\, p_{n-1} + (n-1)(n-2)!\, p_{n-2}. \tag{32}$$

Entonces,

$$np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}. \tag{33}$$

Esta es la relación de recurrencia buscada.

Para estar más seguros, analicemos los primeros casos. Si hay un solo elemento, el número de permutaciones que no lo dejan en el mismo lugar es cero, lo que implica que

$$p_1 = 0. \tag{34}$$

Si hay dos elementos, las permutaciones son AB y BA, y la probabilidad buscada es

$$p_2 = \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Si hay tres elementos, sólo hay dos desarreglos; entonces

$$p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{36}$$

Verifiquemos la relación de recurrencia. Debería ser

$$3p_3 = 2p_2 + p_1. \tag{37}$$

En verdad,

$$3 \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{2} + 0. \tag{38}$$

Podemos usar la relación de recurrencia para definir p_0, p_{-1}, etc., aunque sin darles necesariamente la interpretación de probabilidades, ya que ni siquiera tiene sentido hablar de un número negativo de elementos. Empecemos con p_0,

$$2p_2 = p_1 + p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = 2p_2 - p_1 = 1. \tag{39}$$

Tiene sentido, así como tiene sentido que $0! = 1$ sea interpretado como el número de permutaciones de cero elementos. Luego,

$$
\begin{aligned}
p_{-1} &= p_1 - 0 \times p_0 = 0, \\
p_{-2} &= 0 \times p_0 + p_{-1} = 0.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

A partir de aquí es fácil ver que $p_n = 0$ para $n < 0$.

Para resolver la relación de recurrencia, vamos a aplicar la poderosa técnica de la función generatriz. Definamos la función

$$
F(x) = \sum_n p_n x^n. \tag{41}
$$

La suma se extiende a todos los enteros. Sabemos que $p_n = 0$ para $n < 0$, pero aún así conviene tratar la suma como una suma sobre todos los enteros. La estrategia es transformar la relación de recurrencia para p_n en una ecuación diferencial para $F(x)$. Una vez resuelta esta ecuación, a partir del desarrollo de $F(x)$ en potencias de x, se obtienen los valores de cada p_n.

La relación de recurrencia para las probabilidades es

$$
np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}. \tag{42}
$$

Si multiplicamos cada término por x^n y sumamos sobre n, obtenemos

$$
\sum_n np_n x^n = \sum_n (n-1)p_{n-1}x^n + \sum_n p_{n-2}x^n. \tag{43}
$$

Si no hubiéramos definido p_n para $n < 1$ y extendido la suma a todos los enteros, tendríamos que haber tomado la precaución de empezar la suma desde $n = 2$, para no tener conflictos con los dos últimos términos. Eso hace la cuenta muy engorrosa. En definitiva, la cuestión es relacionar cada uno de los términos de la Ec. (43) con $F(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, en el miembro de la izquierda tenemos

$$
\sum_n np_n x^n = x\frac{d}{dx}\sum_n p_n x^n = xF'(x). \tag{44}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_n (n-1)p_{n-1}x^n &= \sum_n np_n x^{n+1} = x^2F'(x), \\
\sum_n p_{n-2}x^n &= \sum_n p_n x^{n+2} = x^2F(x).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

En estas manipulaciones se observa la conveniencia de haber definido la suma sobre todos los enteros, lo que nos evita considerar términos de borde cuando desplazamos la variable de sumación. Finalmente, la relación de recurrencia para las probabilidades se traduce en la siguiente ecuación diferencial para $F(x)$:

$$xF'(x) = x^2F'(x) + x^2F(x). \tag{46}$$

Reagrupando,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1. \tag{47}$$

Esta ecuación se integra inmediatamente,

$$\log F = c - \log(1-x) - x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{Ce^{-x}}{1-x}. \tag{48}$$

El valor de la constante C puede determinarse evaluando en $x = 0$,

$$F(x) = \sum_n p_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \Rightarrow \quad F(0) = p_0 = 1. \tag{49}$$

Aquí estamos usando lo que habíamos deducido antes, que $p_n = 0$ para $n < 0$ y $p_0 = 1$. Entonces, evaluando la expresión (48) en $x = 0$, vemos que debe ser $C = 1$. No siempre es factible encontrar las constantes de integración evaluando la función generatriz en $x = 0$. O puede ser necesario conocer tanto el valor de F como de sus derivadas, en $x = 0$ o en otro punto. En este problema podríamos haber obtenido el valor de C a partir de $F''(0)$, observando que

$$p_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}F''(0). \tag{50}$$

Calcular $F''(0)$ es trivial pero un poco trabajoso. Se recupera el resultado $C = 1$.

Sea cual sea la forma en la que obtengamos C, el resultado es

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \tag{51}$$

Para obtener p_n para todo n, debemos desarrollar $F(x)$ en potencias de x. Eso es sencillo, porque las funciones involucradas tienen desarrollos de Taylor muy simples,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j, \qquad e^{-x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\, x^l. \tag{52}$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\, x^{j+l} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right] x^n. \tag{53}$$

Aquí hemos usado la fórmula para el producto de dos series, siendo un poco liberales en el intercambio de algunas operaciones,

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_j b_l\, x^{j+l} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n. \tag{54}$$

Luego,

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{55}$$

En particular

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1}. \tag{56}$$

Como muestra la figura, la sucesión $p_0, p_1, p_2, \ldots$ converge rápidamente a este valor.