

## Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2024

### Guía 2: Combinatoria y probabilidades

#### I. Combinatoria

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar cinco personas en hilera? ¿De cuántas maneras si A y B deben estar una al lado de la otra? ¿De cuántas maneras si forman un círculo?
2. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con las letras  $a, b, c, d, e$  y  $f$ ? Considerar los dos casos: i) sin repetir letras, ii) no importa si se repiten letras.
3. ¿Cuántos anagramas diferentes tiene la palabra *manzana*?
4. ¿Cuántos pares de personas pueden elegirse entre  $n$  personas?
5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir  $2n$  personas en  $n$  parejas?
6. ¿Cuántos grupos de  $m$  personas pueden elegirse entre  $n$  personas?
7. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir  $mN$  personas en grupos de  $m$  personas?
8. Hay  $N$  libros y  $M$  cajas. Cada caja puede contener hasta  $N$  libros. Cuántas maneras hay de distribuir los libros en las cajas si:
  - a) Los libros son indistinguibles y las cajas distinguibles.
  - b) Los libros y las cajas son distinguibles.
  - c) Los libros y las cajas son indistinguibles.
  - d) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles y no puede haber cajas vacías.
  - e) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles y sí puede haber cajas vacías.

Los casos complicados en este problema corresponden a las cajas indistinguibles. Las palabras clave son “particiones” y “números de Stirling de segunda especie”.

9.
  - a) Hay  $N$  monedas alineadas en  $N$  sitios numerados de 1 a  $N$ . ¿Cuántas secuencias se pueden formar que tengan  $n$  monedas mostrando cara?
  - b) Una moneda se arroja  $N$  veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en donde hayan aparecido  $n$  caras?
  - c) Una moneda se arroja  $N$  veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que no haya dos caras seguidas?
  - d) Una moneda se arroja  $N$  veces. ¿Cuántas secuencias distintas existen en las que dos caras seguidas recién aparecen en los dos últimos tiros?
  - e) Se arroja una moneda nueve veces. ¿Cuántos lanzamientos existen en donde el número de caras es par? ¿Y si fueran 99 monedas? La solución debe ser explícita.
  - f) Una moneda se arroja  $N$  veces. ¿Cuántas secuencias existen en donde inicialmente salen  $n$  caras seguidas y, o bien  $n = N$ , o bien en el lanzamiento  $n + 1$  sale cruz?

10. Considerar una fila de  $N$  monedas que muestran cara o cruz. No hay una dirección privilegiada desde la cual leer la secuencia de monedas: dos secuencias relacionadas por una reflexión se consideran iguales. Así, para cuatro monedas, las secuencias

$$\times o o o \quad \text{y} \quad o o o \times$$

se consideran iguales. ¿Cuántas secuencias distintas existen? ¿Cuántas secuencias simétricas existen? Por ejemplo, la siguiente la secuencia de siete monedas es simétrica:

$$\times o o \times o o \times$$

## II. Probabilidades

11. Suponiendo que las monedas del problema 9 tienen igual probabilidad de mostrar cara o cruz, calcule las probabilidades de los sucesos de los ítems b–f. En particular, para el ítem f, calcule la longitud media de la secuencia inicial de caras.
12. **El problema del cumpleaños.** En un aula hay  $n$  personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es  $1/365$ , y que las fechas de los cumpleaños de las  $n$  personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad  $p_n$  de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad  $p_n$  supere el 50%? Tome por asalto una computadora y grafique  $p_n$ .
13. **Falso positivo.** Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal y asintomática, hasta que la cabeza explota. Es una enfermedad extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 100 millones de personas. Por suerte, se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, EL LABORATORIO que vende el test recomienda aplicar el test a toda la población. “Además”, argumenta EL LABORATORIO desinteresadamente, “el test es 99,9999% *infallible*” (las itálicas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). O sea, ¡una chance en un millón de que el test falle! ¿No es como decir que el test es perfecto? ¿Quién no apostaría a que el resultado del test está en lo cierto?
- Pues bien. Usted se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ya mismo dejar todos sus asuntos en orden y a cubrirse la cabeza con una BOLSA<sup>®</sup>, que también comercializa EL LABORATORIO? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?
  - Si el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?
  - Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

14. **Aproximación gaussiana de la distribución binomial.** Se trata de un caso particular del Teorema del límite central. La distribución binomial para  $N$  pruebas con probabilidad de éxito  $p$  puede escribirse como

$$P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Aunque se aplica a  $n$  entero, no hay dificultad en extender la función a todos los reales. Defina  $P(x) = e^{f(x)}$ . En lugar de aproximar  $P(x)$  vamos a aproximar  $f(x)$ .

- Escriba  $f(x)$  usando la aproximación de Stirling para el número binomial, es decir, usando que  $\log z! \simeq z \log z - z$ .
  - La función  $P(x)$  es apreciablemente distinta de cero sólo cerca de su máximo, de manera que necesitamos una aproximación para  $f(x)$  en esa región. Usando el resultado del ítem anterior, encuentre la posición  $x_0$  del máximo de  $P(x)$ . Note que esto es equivalente a encontrar el máximo de  $f(x)$ .
  - Desarrolle  $f(x)$  alrededor de  $x_0$  hasta orden cuadrático. Verifique que es un máximo.
  - Reemplace la aproximación cuadrática para  $f(x)$  en la definición  $P(x) = e^{f(x)}$  y encuentre así la gaussiana que aproxima a  $P(x)$ . *Nota:* términos omitidos en la aproximación de Stirling, que no afectan en la práctica la localización del máximo ni la aproximación para  $f(x)$ , sí contribuyen, sin embargo, con un factor de normalización, que en nuestra aproximación falta. Esto puede remediarse multiplicando el resultado por la constante adecuada que haga  $\int P(x) = 1$ . Calcule esta constante. No sería necesario recurrir a este último paso si usáramos la aproximación de Stirling más precisa,  $\log z! \simeq \log \sqrt{2\pi z} + z \log z - z$ .
  - Compare el valor medio y la dispersión de la distribución gaussiana aproximada con el valor medio y la dispersión de la distribución binomial original.
15. **El problema de Jacob Bernoulli.** En *Ars cojectandi*, Bernoulli plantea el siguiente problema. Una urna contiene fichas blancas y negras en proporción de 3 a 2. Así, la probabilidad de extraer una ficha blanca es  $p = \frac{3}{5}$ . En cada paso se extrae una ficha, se anota su color y se la devuelve a la urna. Qué número  $N$  de veces debe repetirse este proceso para que, con una probabilidad de  $\frac{1000}{1001}$ , la fracción de fichas blancas extraídas esté entre  $\frac{29}{50}$  y  $\frac{31}{50}$ . El problema está relacionado con la Ley de los grandes números. Qué tan grande tiene que ser una muestra para que la frecuencia de los resultados aproxime a la probabilidad con un dado error. Bernoulli sólo dio un valor de  $N$  máximo, igual a 25550, que resulta en realidad muy conservativo. Para dar con el valor preciso de  $N$ , usted necesitará hacer el cálculo en una computadora: puede usar la distribución binomial y hacer las sumas necesarias numéricamente, o aproximar la distribución por una normal y usar la inversa de la función error. Esta función está definida en la mayoría de los programas de cálculo y también existen calculadoras en la web, basta con buscar "inverse error function online".

16. **Problème des rencontres.** Hay  $n$  objetos, dispuestos en  $n$  sitios según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad  $p_n$  de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones que no dejan ningún elemento en su posición original. Los ordenamientos que tienen esta propiedad se llaman *desarreglos*. El número de desarreglos de  $n$  elementos suele llamarse subfactorial y notarse con los símbolos  $!n$  o  $d_n$ . Resulta complicado contar directamente el número de desarreglos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí. En particular, en este problema se usa el método de la función generatriz.

- a) Considere los casos  $n = 1, 2, 3$  y  $4$ . Encuentre los valores correspondientes de  $d_n$ .  
 b) Demuestre que, en general,  $d_n$  satisface la siguiente relación de recurrencia

$$d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

- c) Muestre que, en términos de las probabilidades, la ecuación anterior implica

$$np_n = (n - 1)p_{n-1} + p_{n-2}.$$

- d) A partir de esta relación de recurrencia, extienda la definición de  $p_n$  para todo  $n$  entero. ¿Cuánto vale  $p_0$ ? ¿Cuánto vale  $p_n$  con  $n < 0$ ?  
 e) Defina la función generatriz

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n x^n$$

y transforme la relación de recurrencia para  $p_n$  en una ecuación diferencial para  $F(x)$ .

- f) Resuelva la ecuación diferencial para  $F(x)$ . La condición inicial puede determinarse calculando explícitamente  $F(0)$ .  
 g) Desarrollando  $F(x)$  en potencias de  $x$ , encuentre  $p_n$ .  
 h) Muestre que  $p_n \rightarrow e^{-1}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para ver qué tan rápida es la convergencia, grafique  $p_n$ .

17. **El modelo de Ehrenfest.** Para ilustrar la tendencia al equilibrio, Tatiana y Paul Ehrenfest propusieron el siguiente modelo:  $N$  fichas, numeradas de  $1$  a  $N$ , se distribuyen en dos urnas. En cada paso, una ficha se elige al azar y se la cambia de urna. La variable aleatoria es el número  $n$  de fichas en la primera urna. Llamaremos  $p_m(n)$  a la probabilidad de que luego de  $m$  pasos esta urna contenga  $n$  fichas.

- a) Escriba la ecuación de evolución para la probabilidad, es decir, una ecuación que dé  $p_{m+1}(n)$  en términos de las probabilidades en el paso anterior.

- b) Mostrar que la solución estacionaria,  $p(n)$ , es una binomial. *Sugerencia:* la condición de distribución estacionaria quedará en la forma de una ecuación de recurrencia para  $p(n)$ . Esto puede resolverse con el método de la **función generatriz**, definiendo la función auxiliar  $F(x) = \sum x^n p(n)$  y transformando la ecuación de recurrencia para  $p$  en una ecuación diferencial para  $F$ , sujeta a la condición  $F(1) = 1$ . Los coeficientes del desarrollo de  $F(x)$  en potencias de  $x$  son las probabilidades  $p(n)$ .
18. Arnulfo y Burgundófora juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si Arnulfo hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. *Sugerencia:* hay infinitos caminos independientes que llevan a uno u otro ganador; la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino. Existe una manera casi instantánea de resolver este problema. Sabiendo que esa manera existe, trate de encontrarla.
19. Acerca de cierta moneda, inicialmente sólo se puede afirmar que la densidad de probabilidad de que al arrojarla salga cara es uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Se arroja la moneda  $n$  veces y las  $n$  veces sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el siguiente tiro?