

Física Teórica 3 – primer cuatrimestre de 2024

Gas ideal de Fermi–Dirac a temperatura finita*

Estas son las notas de la clase práctica del miércoles 22 de mayo. Se superponen un poco con las que subimos a la página hace un par de semanas. En esas notas encontrarán la deducción del lema de Sommerfeld. Aquí nos limitamos a escribir, sin demostración, los primeros términos del desarrollo. Aquellas notas eran del cuatrimestre pasado; estas están directamente basadas en la clase de *ayer*.

Para un gas ideal de Fermi–Dirac contenido en una caja cúbica de volumen V , con condiciones de contorno periódicas, el logaritmo de la función de partición es

$$\log \mathcal{Z} = \sum_{\{n_x, n_y, n_z\} \in \mathbb{Z}^3} \log \left\{ 1 + z \exp \left[-\frac{\beta \hbar^2}{2mV^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \right] \right\}. \quad (1)$$

Por simplicidad, no estamos teniendo en cuenta los grados de libertad del espín. Si la triple suma se aproxima por una integral y se hace el cambio de variables

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{V^{1/3}} \mathbf{n}, \quad (2)$$

queda

$$\log \mathcal{Z} = \frac{V}{h^3} \int d^3p \log \left(1 + ze^{-\beta p^2/2m} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log \left(1 + ze^{-\beta p^2/2m} \right). \quad (3)$$

Conviene hacer un cambio de variables que aisle la dependencia con β fuera de la integral. Definiendo

$$x = \frac{\beta p^2}{2m}. \quad (4)$$

obtenemos

$$\log \mathcal{Z} = \frac{2\pi V}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \log(1 + ze^{-x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \log(1 + ze^{-x}). \quad (5)$$

Para que esto quede escrito en términos de las funciones de Fermi–Dirac, hay que hacer una integración por partes que transforme el logaritmo en otra cosa,

$$\log \mathcal{Z} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \log(1 + ze^{-x}) \Big|_0^\infty + \frac{2}{3} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{1 + z^{-1} e^x} \right]. \quad (6)$$

La contribución del término integrado es cero. Luego,

$$\log \mathcal{Z} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{1 + z^{-1} e^x}. \quad (7)$$

Con la definición de las funciones de Fermi–Dirac a la vista,

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{1 + z^{-1} e^x}, \quad (8)$$

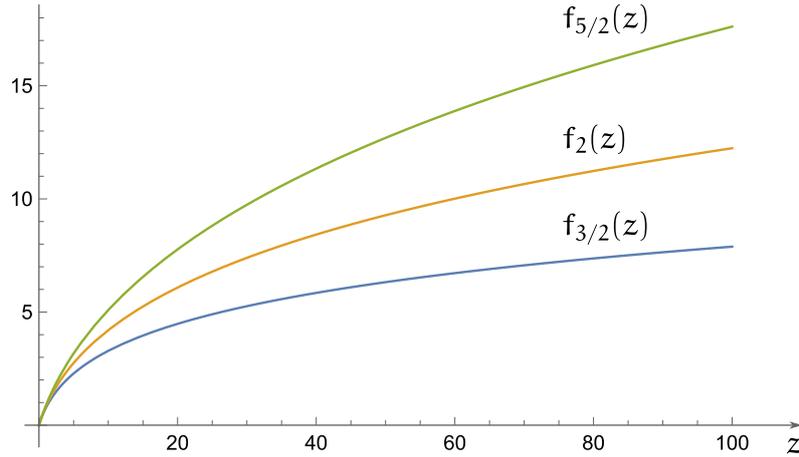
*zanellaj@df.uba.ar

resulta, finalmente,

$$\log \mathcal{Z}(\beta, V, z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) f_{5/2}(z) = \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z). \quad (9)$$

Este es un punto de partida conveniente para los problemas en donde $T > 0$. El caso $T = 0$ es más fácil de tratar partiendo directamente del hecho de que la función de distribución de Fermi–Dirac es un escalón. Nunca aparecen, en este caso, las funciones $f_\nu(z)$.

Las funciones de Fermi–Dirac cuando z es real y mayor que cero no son especialmente interesantes.



Es fácil obtener el desarrollo de las funciones $f_\nu(z)$ en potencias de z ,

$$\begin{aligned} f_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{1+z^{-1}e^x} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} \frac{ze^{-x}}{1+ze^{-x}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} (ze^{-x})^l = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} z^l \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-lx} \quad (10) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} \int_0^\infty dy y^{\nu-1} e^{-y}. \end{aligned}$$

El desarrollo en serie de potencias de la segunda línea asume que $z < 1$. La última integral ya no depende de l y es igual a $\Gamma(\nu)$. Entonces,

$$f_\nu(z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} = z - \frac{z^2}{2^\nu} + \frac{z^3}{3^\nu} - \dots \quad (11)$$

Una propiedad que se demuestra inmediatamente a partir de este desarrollo es que

$$z f'_\nu(z) = f_{\nu-1}(z). \quad (12)$$

Esto es útil para calcular las derivadas del logaritmo de la función de partición. Por ejemplo,

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \left[\log \mathcal{Z}(\beta, V, z) \right] = \frac{V}{\lambda^3} z f'_{5/2}(z) = \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(z). \quad (13)$$

Como en realidad el dato suele ser N , esta ecuación es menos una ecuación para N que para z . Una característica notable, no sólo en los gases ideales de Fermi-Dirac, sino también en los de Bose-Einstein, es que las expresiones de $\log \mathcal{Z}$ y N , en términos de las funciones de Fermi-Dirac o de las de Bose-Einstein, son extremadamente simples. En otras dimensiones o con otras relaciones de dispersión o, acaso en potenciales externos, este hecho sigue siendo usualmente cierto. Si obtienen resultados muy complicados, con raíces de π dando vueltas, es probable que hayan cometido algún error. Previsiblemente, hay excepciones a la regla. Muchas veces, las raíces de π dando vueltas son absorbidas de manera conveniente, por ejemplo, en la definición de λ .

La energía media puede calcularse como

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\log \mathcal{Z}(\beta, V, z) \right] = \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT f_{5/2}(z). \quad (14)$$

Para comparar con las fórmulas del gas ideal clásico, es útil reescribir este resultado mediante la relación (13),

$$U = \frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}. \quad (15)$$

Cuando $z \ll 1$, debería recuperarse el límite clásico. En efecto, las funciones $f_\nu(z)$ tienden a z y queda $U = \frac{3}{2} NkT$. Sin embargo, operacionalmente, la expresión (15) es un poco incómoda, porque involucra el cociente de dos funciones de z . Por ejemplo, para calcular el calor específico, resulta más práctico usar directamente la expresión (14),

$$\frac{c_V}{k} = \frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{15}{4} \frac{V}{N\lambda^3} f_{5/2}(z) + \frac{3}{2} \frac{V}{N\lambda^3} \frac{T}{z} f_{3/2}(z) \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N}. \quad (16)$$

Para encontrar la derivada de la fugacidad, podemos diferenciar la expresión (13),

$$dN = \frac{V}{\lambda^3} \left[f_{3/2}(z) \frac{dV}{V} + \frac{3}{2} f_{3/2}(z) \frac{dT}{T} + f_{1/2}(z) \frac{dz}{z} \right]. \quad (17)$$

De aquí leemos

$$\frac{T}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N} = -\frac{3}{2} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}. \quad (18)$$

Al reemplazar este resultado en la Ec. (16), queda

$$\frac{c_V}{k} = \frac{V}{N\lambda^3} \left[\frac{15}{4} f_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)^2}{f_{1/2}(z)} \right] = \frac{V}{N\lambda^3} f_{3/2}(z) \left[\frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \right]. \quad (19)$$

Pero, según la Ec. (13), lo que multiplica al corchete es igual a uno. En definitiva,

$$\frac{c_V(z)}{k} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}. \quad (20)$$

Cuando $z \ll 1$, todas las funciones $f_\nu(z)$ tienden a z , y

$$\frac{c_V}{k} \rightarrow \frac{15}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{2}. \quad (21)$$

En última instancia, lo que uno quiere es un gráfico del calor específico en función de la temperatura. Lo que tenemos es el calor específico como función de z , pero no z como función de la temperatura. La ecuación que determina z como función de la temperatura es la Ec. (13),

$$\frac{N\lambda^3}{V} = f_{3/2}(z). \quad (22)$$

Pero tampoco tenemos las funciones inversas de las f_ν . En la práctica, esto no representa ningún problema. Podemos graficar c_V paramétricamente. El parámetro es z ; las ecuaciones son

$$\left\{ \begin{array}{l} kT = \left[\frac{1}{f_{3/2}(z)} \frac{N}{V} \right]^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m}, \\ \frac{c_V}{k} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \end{array} \right. \quad (23)$$

Ahora bien, es una buena idea que lo que uno grafique dependa del menor número de parámetros. Tal como están escritas las ecuaciones anteriores, tendríamos que elegir valores de N , V y m , y kT quedaría expresado en joules. Es todo muy inconveniente. Hay que tratar de definir cantidades adimensionales. Evidentemente, la siguiente cantidad tiene unidades de energía:

$$\left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m}. \quad (24)$$

Esta es una escala típica de energía. No hace falta gran perspicacia para prever que debe ser proporcional a la energía de Fermi. En verdad,

$$\epsilon_F = \left(\frac{3\sqrt{\pi} N}{4 V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m}. \quad (25)$$

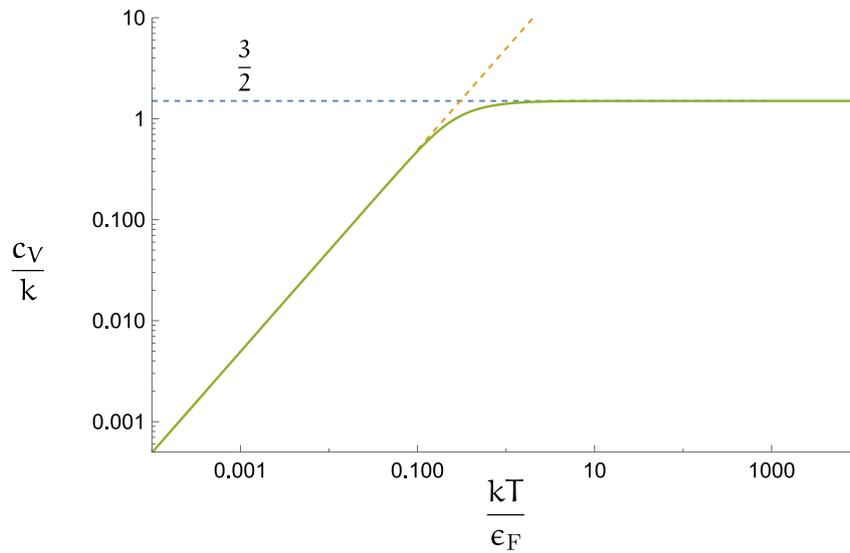
De modo que podemos reformular las ecuaciones (23) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{kT}{\epsilon_F} = \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi} f_{3/2}(z)} \right]^{2/3}, \\ \frac{c_V}{k} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \end{array} \right. \quad (26)$$

Queda entonces definida una función universal, que no depende de ningún parámetro del sistema. Sea cual sea el gas de Fermi que estemos analizando, si graficamos paramétricamente c_V/k en función de kT/ϵ_F , debemos obtener siempre el mismo gráfico, que es el que se muestra en la página siguiente.

Por último, para calcular la entropía, usaremos que

$$\begin{aligned} TS &= U + PV - \mu N = \frac{5}{3}U - NkT \log z \\ &= \frac{5}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT g_{5/2}(z) - NkT \log z. \end{aligned} \quad (27)$$



Aquí hemos aprovechado la relación $PV = \frac{2}{3}U$. Luego,

$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{V}{N\lambda^3} g_{5/2}(z) - \log z. \tag{28}$$

Mediante la relación (13) entre N y z , esto también puede escribirse como

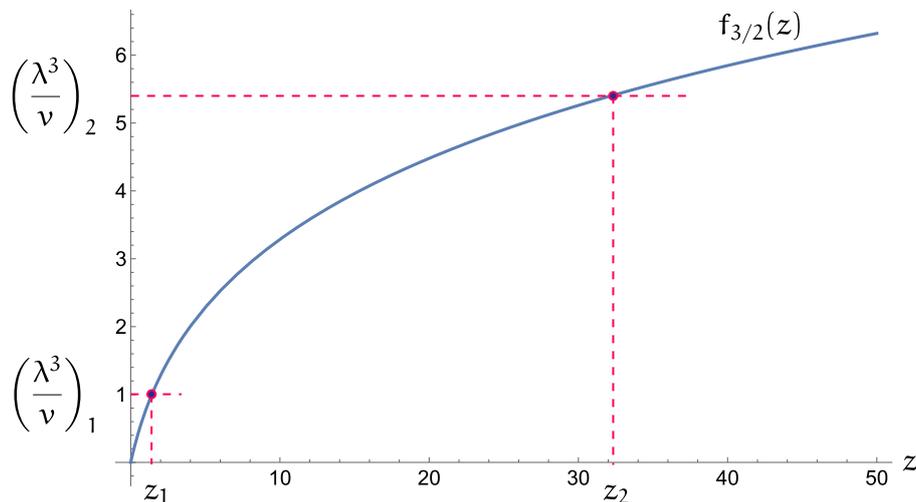
$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z. \tag{29}$$

Esta forma de escribir la entropía muestra inmediatamente que, cuando $z \ll 1$, se recupera el comportamiento clásico. Pero, al igual que la expresión (15), la ecuación anterior suele ser más elegante que útil. Es útil si uno quiere graficar S como función de T , pero no es muy práctica si uno quiere calcular derivadas de la entropía, puesto que hay un cociente de funciones de z .

Las funciones de Fermi-Dirac son funciones crecientes y cóncavas que tienden a cero linealmente con z cuando z tiende a cero. De manera gráfica, la Ec. (13) que determina z ,

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z), \tag{30}$$

donde $v = V/N$, se resuelve eligiendo un valor de λ^3/v y buscando la intersección de esa línea de nivel con la gráfica de la función $f_{3/2}(z)$.



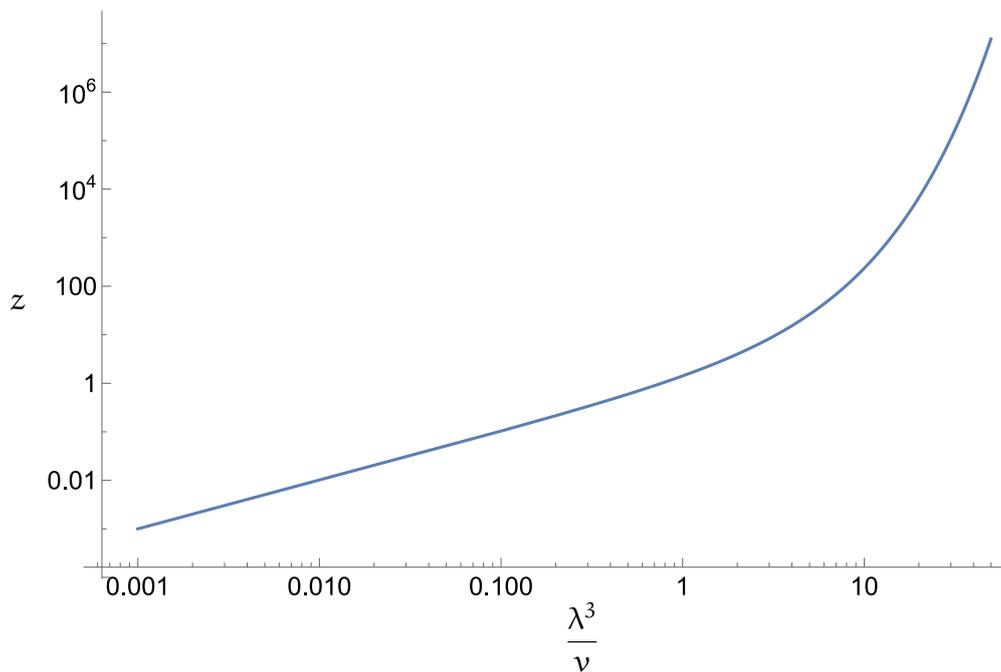
Es evidente que z es una función creciente de λ^3/ν . Debido a que $f_{3/2}(z) \simeq z$ si $z \ll 1$, para $\lambda^3/\nu \ll 1$, será

$$z \simeq \frac{\lambda^3}{\nu}, \quad (31)$$

que es el resultado clásico. Ahora bien, las funciones f_ν crecen de manera muy lenta con z , de modo que si λ^3/ν es lo suficientemente grande, z será mucho mayor uno y tenderá en forma muy rápida a infinito. De hecho, según mostraremos en un momento,

$$z \simeq \exp \left[\left(\frac{3\sqrt{\pi} \lambda^3}{4 \nu} \right)^{2/3} \right]. \quad (32)$$

La figura muestra z como función de λ^3/ν .



Para mostrar que, para valores muy grandes de λ^3/ν , la fugacidad z se comporta según la Ec. (32), basta con notar que, cuando $T \rightarrow 0$, el potencial químico tiende a un valor finito, ϵ_F . Entonces, la fugacidad se comportará como

$$z \simeq e^{\beta \epsilon_F}. \quad (33)$$

La energía de Fermi está dada por

$$\epsilon_F = \left[\frac{N}{V} \frac{3h^3}{4\pi(2m)^{3/2}} \right]^{2/3} = \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4\nu} \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \right)^3 \right]^{2/3}. \quad (34)$$

Reemplazando esta expresión en la Ec. (33), se recupera el resultado (32).

El comportamiento del sistema está determinado por el valor del parámetro λ^3/ν . Altas temperaturas o bajas densidades llevan al régimen clásico. A la inversa, bajas temperaturas o altas densidades ubican al sistema en el régimen degenerado, en donde los efectos cuánticos son

importantes. Hay una manera alternativa de pensar estos límites. En lugar de comparar dos volúmenes, λ^3 y ν , la idea es comparar dos energías. Tenemos que

$$\frac{\lambda^3}{\nu} = \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} = \left[\left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi mkT} \right]^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{kT} \right)^{3/2}. \quad (35)$$

Esto muestra que hablar de bajas densidades o altas temperaturas es equivalente a hablar de temperaturas altas respecto de la energía de Fermi, y viceversa. Cerca del régimen clásico, conviene manejarse con el parámetro λ^3/ν . En el régimen degenerado, es más práctico caracterizar al sistema por el parámetro kT/ϵ_F .

Primeras correcciones cuánticas

Para obtener las primeras correcciones cuánticas al gas ideal clásico, hay que analizar el régimen en el que $\lambda^3/\nu \ll 1$. Ya hemos visto que, en tal caso, $z \ll 1$, y que, además, N , U y S están dadas, en primera aproximación, por sus expresiones clásicas:

$$N = \frac{zV}{\lambda^3}, \quad U = \frac{3}{2}NkT, \quad \frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} + \log\left(\frac{\nu}{\lambda^3}\right). \quad (36)$$

Para obtener las primeras correcciones cuánticas, hay que conservar más términos en el desarrollo de las funciones de Fermi-Dirac. La ecuación para z se lee como

$$N = \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(z) = \frac{V}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots \right). \quad (37)$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma de una ecuación de punto fijo:

$$z = \frac{\lambda^3}{\nu} + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots \quad (38)$$

El parámetro pequeño es λ^3/ν . Si escribiéramos la fugacidad como una serie de potencias en este parámetro, su desarrollo empezaría como

$$z = \frac{\lambda^3}{\nu} + \dots \quad (39)$$

Si reemplazamos este desarrollo en el miembro derecho de la Ec. (38), hasta orden cuadrático, los términos de orden superior no van a afectar el resultado. Hasta ese orden, es válido escribir

$$z = \frac{\lambda^3}{\nu} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 = \frac{\lambda^3}{\nu} \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{\nu} \right). \quad (40)$$

Por otro lado,

$$U = \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots \right). \quad (41)$$

De manera que, escribiendo lo que hay dentro del paréntesis hasta orden cuadrático en λ^3/ν ,

$$U \simeq \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT \left[\frac{\lambda^3}{\nu} \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{\nu} \right) - \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} NkT \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{\nu} \right). \quad (42)$$

Puesto que la presión es $PV = \frac{2}{3}U$, la ecuación de estado del gas de Fermi–Dirac que tiene en cuenta la primera corrección cuántica es

$$PV = NkT \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} \right). \quad (43)$$

Para calcular la primera corrección al calor específico, no es necesario partir de la Ec. (20), sino que es más práctico usar la Ec. (42):

$$\frac{c_V}{k} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} \right) - \frac{9}{4} \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{v} \right). \quad (44)$$

Queda como ejercicio encontrar la primera corrección cuántica a la entropía.

Primeras correcciones de temperatura finita

Ahora queremos analizar el otro límite, cuando la densidad de partículas es muy alta o la temperatura es muy baja. Ya vimos que eso es equivalente a decir, de manera más simple,

$$\frac{kT}{\epsilon_F} \ll 1. \quad (45)$$

Puesto que, cuando $T \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \epsilon_F$, la fugacidad, en este límite tiende a infinito. Estamos interesados entonces en el régimen en el que $z \gg 1$. El comportamiento asintótico de las funciones de Fermi–Dirac está dado por el lema de Sommerfeld. Nos limitaremos a los dos primeros términos del desarrollo. Cuando $\xi \gg 1$,

$$f_\nu(e^\xi) \simeq \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \nu(\nu-1) \xi^{-2} \right]. \quad (46)$$

Veamos primero cómo evoluciona el potencial químico cuando la temperatura aumenta desde cero. Sabemos que a altas temperaturas, el potencial químico debe ser negativo y que a temperatura cero toma un valor finito y positivo, ϵ_F . Entonces, deberíamos esperar que al aumentar la temperatura desde cero el potencial químico disminuyera. La ecuación que determina la fugacidad es

$$N = \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \simeq \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

De nuevo, podemos transformar esta ecuación en una ecuación de punto fijo,

$$\mu = \left[\frac{3\sqrt{\pi} N \lambda^3}{4 V} (kT)^{3/2} \right]^{2/3} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-2/3}. \quad (48)$$

Conviene escribir λ explícitamente, para cancelar el factor $(kT)^{3/2}$ que aparece dentro del primer corchete:

$$\mu = \left(\frac{3 N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-2/3}. \quad (49)$$

Si $T = 0$, deberíamos recuperar la energía de Fermi, lo que es fácil verificar. Así,

$$\mu = \epsilon_F \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-2/3}. \quad (50)$$

Por hipótesis $kT \ll \epsilon_F$. Además, sabemos que para $T \rightarrow 0$, el potencial químico tiende a ϵ_F . De modo que existirá una región de temperaturas en la que será válido afirmar que kT/μ es del mismo orden que kT/ϵ_F , que es nuestro parámetro pequeño. Entonces, hasta orden cuadrático en este parámetro, resulta

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (51)$$

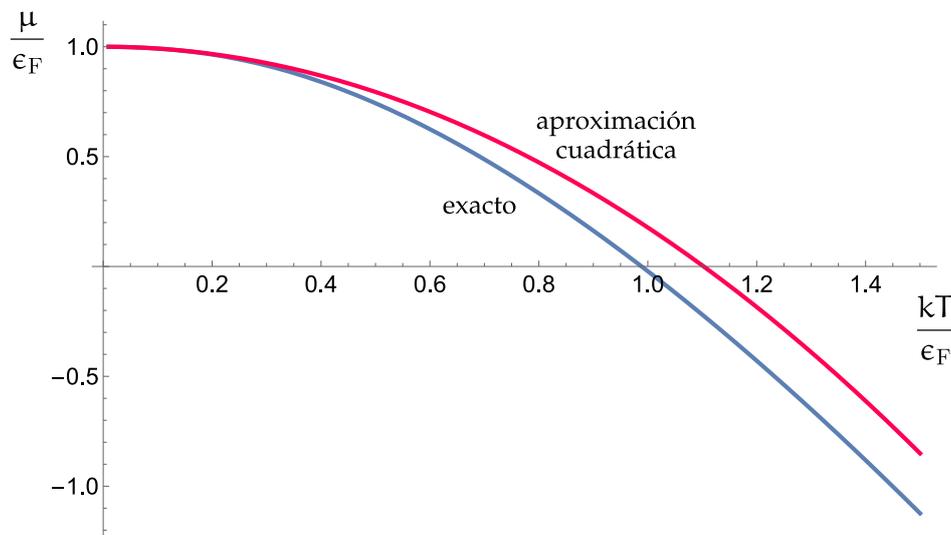
Esto significa que $\mu = \epsilon_F + \mathcal{O}([kT/\epsilon_F]^2)$. Es decir,

$$\mu = \epsilon_F \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left[\frac{kT}{\epsilon_F + \mathcal{O}([kT/\epsilon_F]^2)} \right]^2 \right\}. \quad (52)$$

Si conserváramos los términos de orden $(kT/\epsilon_F)^2$ dentro del corchete, estos términos contribuirían con correcciones de orden $(kT/\epsilon_F)^4$. No sería consistente conservar esos términos. Entonces, hasta orden cuadrático en el parámetro pequeño,

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (53)$$

Este es nuestro primer resultado. En verdad, tal como habíamos previsto, el potencial químico disminuye al aumentar la temperatura. Según podemos estimar de la expresión anterior, el potencial químico debería anularse cuando $kT \approx (\sqrt{12}/\pi)\epsilon_F \approx 1,1\epsilon_F$. La siguiente figura muestra que esta estimación no está muy errada.



Respecto al valor exacto de la temperatura al cual se anula el potencial químico, resuelvan el último problema de la guía. No es lo que parece.

Veamos ahora las correcciones a la energía. En principio,

$$U = \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda^3} kT f_{5/2}(z). \quad (54)$$

Cuando $\beta\mu \gg 1$,

$$U \simeq \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} kT \left(\frac{\mu}{kT}\right)^{5/2} \left[1 + \frac{5}{8}\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] = \frac{4\pi(2m)^{3/2}V}{5h^3} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5}{8}\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]. \quad (55)$$

Sabemos que a $T = 0$, es $U = \frac{3}{5}N\epsilon_F$. Si confiamos en la ecuación anterior, debería ser

$$U \simeq \frac{3}{5} \frac{\mu^{5/2}}{\epsilon_F^{3/2}} \left[1 + \frac{5}{8}\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]. \quad (56)$$

Hasta orden T^2 , usando el resultado (53),

$$\begin{aligned} U &= \frac{3}{5}N\epsilon_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{24} \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right] \left[1 + \frac{5}{8}\pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right] \\ &= \frac{3}{5}N\epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Esta expresión permite obtener directamente el calor específico hasta orden lineal en T ,

$$\frac{c_V}{k} = \frac{\pi^2 kT}{2 \epsilon_F}. \quad (58)$$

Queda como ejercicio obtener la primera corrección de temperatura finita para la entropía. Aquí nos limitaremos a verificar que S es cero a temperatura cero. En verdad, a partir de la Ec. (29), conservando sólo el término dominante de la expansión de Sommerfeld,

$$\frac{S}{kN} = \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z = \frac{5}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} \beta\mu - \beta\mu = \frac{5}{2} \frac{3}{15} \beta\mu - \beta\mu = 0. \quad (59)$$

Ejercicios propuestos

- Encontrar las correcciones cuánticas en el régimen clásico al siguiente orden.
- Encontrar las correcciones de temperatura finita en el régimen ultradegenerado al siguiente orden.

Ya el hecho de que puedan resolver estas cosas en la computadora es suficiente indicador de que las sabrían resolver con lápiz y papel. Si lo saben programar, lo saben resolver. Pueden hacer uno a mano y hacer el otro en la computadora, o incluso escribir un programa que encuentre las correcciones hasta un orden arbitrario. La expresión general del desarrollo de Sommerfeld figura, por ejemplo, en el apéndice E del libro de Pathria y Beale.