Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2024

GUÍA 5 – DIPOLO MAGNÉTICO*

■ **Problema**. Un dipolo magnético con momento $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \mathbf{n}$, donde $|\mathbf{n}| = 1$, está fijo en el origen, pero es libre de orientarse en cualquier dirección. Hay un campo magnético externo $\mathbf{B}$. La energía del dipolo es

$$E(\boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}. \tag{1}$$

El sistema está a temperatura T. Encontrar el valor medio del momento magnético como función de $\mathbf{B}$ y T y calcular la susceptibilidad,

$$\chi_{ij} = \left. \frac{\partial \langle \mu_i \rangle}{\partial B_j} \right|_{B=0}. \tag{2}$$

■ **Solución**. Este problema está relacionado con el problema 17 de la Guía 5. Aquí no hay un espacio de fase con impulsos y coordenadas conjugados. Se necesitan dos coordenadas para dar la orientación del dipolo, pero esas coordenadas no tienen asociados impulsos generalizados. La regla heurística es asignar una densidad de probabilidad proporcional al factor de Boltzmann,

$$f(\mathbf{n}) \propto e^{-\beta E(\boldsymbol{\mu})} = e^{\beta \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}} = e^{\beta \mu_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}}. \tag{3}$$

Conviene definir el vector

$$\mathbf{b} = \beta \mu_0 \mathbf{B}, \tag{4}$$

de modo que

$$f(\mathbf{n}) \propto e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}. \tag{5}$$

Lo que debemos preguntarnos es con respecto a qué variables es $f(\mathbf{n})$ una densidad de probabilidad. O, en otros términos, ¿Z es la integral de $f(\mathbf{n})$ en qué variables? Supongamos que se usen los ángulos esféricos θ y φ para dar la orientación del dipolo. Una posibilidad sería decir que $f(\mathbf{n})$ es la densidad de probabilidad respecto a θ y φ, y escribir

$$Z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \; e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}. \qquad :(\tag{6}$$

Esta definición asigna una probabilidad

$$dp(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z} e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \, d\varphi \, d\theta \qquad :(\tag{7}$$

*zanellaj@df.uba.ar

a que la dirección del dipolo esté comprendida entre θ y $\theta + d\theta$ y entre φ y $\varphi + d\varphi$. Ahora bien, si el campo externo fuera nulo, el dipolo debería tener una distribución de probabilidad uniforme. La manera formal de expresar eso es decir que la probabilidad de que el extremo del vector $\mathbf{n}$ esté en un elemento de superficie da sobre la esfera unitaria debe ser independiente de la dirección y proporcional al área del elemento de superficie. De acuerdo a la definición (7), cuando el campo es cero, la probabilidad de que $\mathbf{n}$ esté en el elemento de superficie da definido entre los ángulos θ y $\theta + d\theta$ y entre los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$ es

$$dp(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z}\frac{da}{\sin\theta}. \tag{8}$$

Esta probabilidad no es independiente de la dirección. Hay uniformidad en φ, pero no en θ. La misma expresión deja en evidencia qué es lo que hace falta para escribir la probabilidad correcta. Debería ser

$$dp(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z}\, e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}} \sin\theta\; d\varphi\, d\theta = \frac{1}{Z} e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}\, d\Omega. \qquad :\,) \tag{9}$$

Entonces, la función de partición correcta es

$$Z = \int d\Omega\; e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}. \tag{10}$$

La densidad de probabilidad de que el dipolo apunte dentro de un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z} e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}. \tag{11}$$

Es una densidad de probabilidad respecto al ángulo sólido. En coordenadas esféricas, es una densidad de probabilidad respecto a las variables φ y $\cos\theta$.

El valor medio del momento dipolar es

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = \frac{1}{Z}\int d\Omega\; \boldsymbol{\mu}\; e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}. \tag{12}$$

Aunque ciertamente podemos calcular la integral que figura en la ecuación anterior usando, por ejemplo, coordenadas esféricas, es más sencillo escribir

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_0 \frac{\partial \log Z}{\partial \mathbf{b}}. \tag{13}$$

Para calcular Z, podemos fijar momentáneamente los ejes del sistema de coordenadas de modo que $\hat{z}$ esté en la dirección de $\mathbf{b}$ y usar coordenadas esféricas para escribir $\mathbf{n}$. El producto escalar será simplemente

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = b\cos\theta. \tag{14}$$

Luego,

$$Z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{b\cos\theta} = 4\pi \frac{\sinh b}{b}. \tag{15}$$

Esta es una función del módulo de $\mathbf{b}$, de manera que

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \log Z}{\partial b}\, \hat{b}. \tag{16}$$

Explícitamente,

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \mathbf{b}} = \left(\coth b - \frac{1}{b}\right) \hat{b}. \tag{17}$$

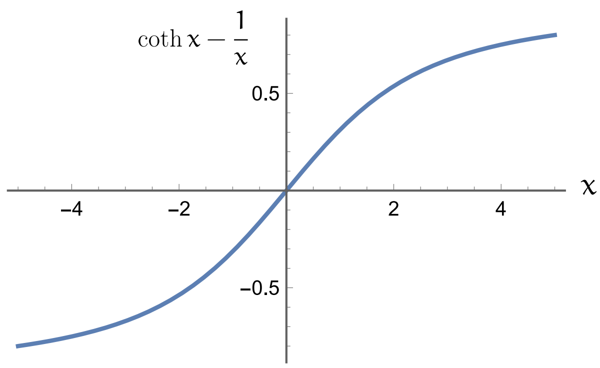
Uno podría tener algún tipo de escrúpulo cuando b tiende a cero, pero no ocurre nada singular. La función

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}, \tag{18}$$

llamada función de Langevin, tiene un límite finito cuando $x \to 0$; a saber, cero:

$$L(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{1}{x} = \frac{1 + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots}{x + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \ldots\right) - \frac{1}{x} = \frac{x}{3} + \ldots \tag{19}$$

El gráfico de $L(x)$ se muestra en la siguiente figura.



En resumen,

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \mu_0 L(b)\hat{b} = \mu_0 L(\beta\mu_0 B)\hat{B}. \tag{20}$$

El único vector que aparece en el problema es $\mathbf{B}$. Es inevitable que el momento magnético medio esté en la dirección de este vector.

La susceptibilidad

La susceptibilidad, en general, es un tensor. Cuando el módulo del campo magnético tiende a cero, se define $\boldsymbol{\chi}$, independiente de $\mathbf{B}$, de manera que

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{B}, \qquad B \to 0; \tag{21}$$

o, en componentes,

$$\langle \mu_i \rangle = \chi_{ij} B_j, \qquad B \to 0. \tag{22}$$

Un campo en la dirección x no necesariamente produce una magnetización en la dirección x. Por eso la susceptibilidad es un tensor. Un campo en la dirección x puede producir una magnetización en las tres direcciones. El tensor $\boldsymbol{\chi}$ es diagonalizable, pero aun así sus elementos diagonales serán, en general, distintos. Cuando $\boldsymbol{\chi}$ es proporcional al tensor unidad, la magnetización es paralela al campo.

Vamos a calcular la susceptibilidad por tres métodos. Luego introduciremos algunas simplificaciones relacionadas con el hecho de que, en este problema, el momento magnético medio es paralelo al campo externo. Veremos que no es necesario trabajar con un tensor $\boldsymbol{\chi}$, sino que alcanza con un escalar.

Primer método

Este es el método más trabajoso, porque requiere escribir la función de partición como función de $\mathbf{B}$, calcular el gradiente de Z respecto de $\mathbf{B}$ y, finalmente, tomar el límite $B \to 0$. Puesto que la susceptibilidad relaciona el campo con la magnetización cuando $B \to 0$, calcular la función de partición en el caso general es excesivo. En los otros dos métodos, el límite $B \to 0$ está tenido en cuenta desde un comienzo.

Lo que encontramos antes es que

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \mu_0 L(b) \hat{b} = \mu_0 \frac{L(b)}{B} \mathbf{B}, \tag{23}$$

o, en componentes,

$$\langle \mu_i \rangle = \mu_0 \frac{L(b)}{B} B_i = \mu_0 \frac{L(b)}{B} \delta_{ij} B_j = \beta \mu_0^2 \frac{L(b)}{b} \delta_{ij} B_j. \tag{24}$$

Así, leemos directamente que

$$\chi_{ij} = \beta \mu_0^2 \delta_{ij} \lim_{b \to 0} \frac{L(b)}{b}. \tag{25}$$

Puesto que $L(0) = 0$,

$$\lim_{b \to 0} \frac{L(b)}{b} = L'(0). \tag{26}$$

Hay que calcular $L'(0)$ con cierto cuidado:

$$L'(b) = -\frac{1}{\sinh^2 b} + \frac{1}{b^2}. \tag{27}$$

Pero,

$$\sinh b = b + \frac{b^3}{3!} + \dots, \tag{28}$$

de manera que

$$\frac{1}{\sinh^2 b} = \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{b^2}{3!} + \dots\right)^{-2} = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{b^2}{3} + \dots\right) = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{3} + \dots \tag{29}$$

Finalmente,

$$L'(b) = \frac{1}{3} + \dots \tag{30}$$

Cuando $b \to 0$,

$$L'(b) \to \frac{1}{3}. \tag{31}$$

Es cierto que podríamos haber usado directamente el resultado (19).

Luego,

$$\chi_{ij} = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2\delta_{ij} = \frac{\mu_0^2}{3kT}\delta_{ij}. \tag{32}$$

Este tipo de comportamiento con la temperatura se conoce como ley de Curie.

Segundo método

Hay otra forma de calcular la susceptibilidad que no requiere resolver explícitamente el problema cuando hay un campo externo. Esto es importante, porque no siempre es fácil encontrar la función de partición cuando hay campo. En este ejemplo es trivial, pero hay casos en los que no. Veremos que la susceptibilidad puede calcularse tomando promedios respecto a la distribución de probabilidad cuando $B = 0$. En este problema eso es particularmente simplificador, porque en tal caso la densidad de probabilidad es uniforme. La idea del método es escribir la susceptibilidad en términos de valores medios que, en última instancia, son funciones de correlación a campo nulo.

La susceptibilidad se define a partir del comportamiento del momento magnético cuando la intensidad del campo tiende a cero,

$$\langle \mu_i \rangle = \chi_{ij} B_j, \qquad B \to 0. \tag{33}$$

Vemos, entonces, que

$$\chi_{ij} = \left.\frac{\partial \langle \mu_i \rangle}{\partial B_j}\right|_{B=0} = \beta\mu_0 \left.\frac{\partial \langle \mu_i \rangle}{\partial b_j}\right|_{b=0}. \tag{34}$$

Ahora bien, según la Ec. (20),

$$\langle \mu_i \rangle = \mu_0 \frac{\partial \log Z}{\partial b_i}. \tag{35}$$

Luego,

$$\chi_{ij} = \beta\mu_0^2 \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial b_i}\right)\bigg|_{b=0} = \beta\mu_0^2 \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial b_i \partial b_j} - \frac{1}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial b_i}\frac{\partial Z}{\partial b_j}\right)\bigg|_{b=0}. \tag{36}$$

Podemos interpretar probabilísticamente cada una de estas derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{1}{Z}\int d\Omega\, n_i n_j\, e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}} = \langle n_i n_j \rangle\,. \tag{37}$$

Por otro lado, ya habíamos visto que

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \frac{1}{Z}\int d\Omega\, n_i\, e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}} = \langle n_i \rangle\,. \tag{38}$$

Así,

$$\chi_{ij} = \beta\Big(\langle \mu_i \mu_j \rangle - \langle \mu_i \rangle \langle \mu_j \rangle\Big)\Big|_{b=0}. \tag{39}$$

Aquí no hay que tomar derivadas y evaluar en $b = 0$. Directamente tenemos que calcular los valores medios cuando $b = 0$. El valor medio de $\boldsymbol{\mu}$ sin campo es trivial. Por simetría

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle\big|_{b=0} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\Omega\, \mathbf{n} = 0. \tag{40}$$

Esto simplemente dice que el momento magnético es nulo si el campo es cero. Respecto al otro valor medio,

$$\langle \mu_i \mu_j \rangle\big|_{b=0} = \frac{\mu_0^2}{4\pi}\int d\Omega\, n_i n_j. \tag{41}$$

Por simetría, la integral es distinta de cero sólo si $i = j$. Si $i = j$, la integral no depende del valor de i. Es lo mismo que calculemos la integral de n_x^2 que la integral de n_y^2 o que la integral de n_z^2. Lo que podemos hacer es calcular la suma de esas tres integrales y dividir el resultado por tres, porque de ese modo formamos la integral de $|\mathbf{n}|^2 = 1$:

$$\int d\Omega\, n_i n_j = \delta_{ij}\int d\Omega\, n_j^2 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\int d\Omega\, |\mathbf{n}|^2 = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}. \tag{42}$$

También podríamos haber elegido calcular la más fácil de las tres integrales,

$$\int d\Omega\, n_z^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ \cos^2\theta = \frac{4\pi}{3}. \tag{43}$$

También podríamos haber elegido calcular la más difícil de las tres integrales:

$$\int d\Omega\, n_x^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi\ \cos^2\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\sin^2\theta = \pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\left(1-\cos^2\theta\right) = \frac{4\pi}{3}. \tag{44}$$

Esto es para que vean que, aun si no se les ocurre la forma más práctica de hacer un cálculo, el cálculo al final sale.

De la manera que sea, reemplazando en la Ec. (41)

$$\langle \mu_i \mu_j \rangle \Big|_{b=0} = \frac{\mu_0^2}{3} \delta_{ij}. \tag{45}$$

Volviendo a la Ec. (39), obtenemos lo mismo que antes,

$$\chi_{ij} = \frac{1}{3} \beta \mu_0^2 \delta_{ij}. \tag{46}$$

La ventaja de este método es que sólo hemos tenido que calcular valores medios respecto a la densidad de probabilidad cuando $B = 0$, que es uniforme. Recordemos que

$$f(\mathbf{n}) = \frac{e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}}{Z}, \tag{47}$$

donde

$$Z = \int d\Omega \; e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}. \tag{48}$$

Cuando $b = 0$,

$$Z = 4\pi, \tag{49}$$

y, entonces,

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi}. \tag{50}$$

Siguiendo este método nunca fue necesario resolver la función de partición para campos distintos de cero. Hubo que calcular algunos valores medios explícitamente, pero respecto a la distribución uniforme, lo que resultó muy sencillo. Este método únicamente nos da acceso a la susceptibilidad. Para calcular el valor medio del momento magnético como función del campo, no podemos tomar $B = 0$. Hay que calcular la función de partición en el caso general.

Tercer método

Este método tiene un poco de los dos métodos que vimos antes. La idea es calcular explícitamente el valor medio de $\boldsymbol{\mu}$ cuando $B \to 0$. Para eso, escribamos

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \frac{\displaystyle\int d\Omega \; \boldsymbol{\mu} \; e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}}{\displaystyle\int d\Omega \; e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}}. \tag{51}$$

Queremos calcular esta expresión hasta orden lineal en b. Desarrollemos las exponenciales hasta ese orden. Para el denominador,

$$\int d\Omega \; e^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \simeq \int d\Omega \; (1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = 4\pi + \mathbf{b} \cdot \int d\Omega \; \mathbf{n} = 4\pi. \tag{52}$$

Para el numerador,

$$\int d\Omega\ \boldsymbol{\mu}\ e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}} \simeq \int d\Omega\ \boldsymbol{\mu}\ (1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}) = \mu_0\mathbf{b}\cdot\int d\Omega\ \mathbf{n}\mathbf{n}. \tag{53}$$

Aquí estamos usando notación de diadas. En componentes, usando la Ec. (42),

$$\left(\int d\Omega\ \mathbf{n}\mathbf{n}\right)_{ij} = \int d\Omega\ n_i n_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}. \tag{54}$$

En notación de diadas,

$$\int d\Omega\ \mathbf{n}\mathbf{n} = \frac{4\pi}{3}\,\mathbb{1}. \tag{55}$$

En definitiva,

$$\mu_0\mathbf{b}\cdot\int d\Omega\ \mathbf{n}\mathbf{n} = \frac{4\pi}{3}\mu_0\mathbf{b}. \tag{56}$$

Volviendo a la Ec. (51), hasta orden lineal en b, obtenemos

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle \simeq \frac{\mu_0}{3}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2\mathbf{B}. \tag{57}$$

A partir de aquí podemos leer la susceptibilidad directamente,

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2\,\mathbb{1}. \tag{58}$$

Visto en retrospectiva, este fue el método más simple. No hubo que calcular derivadas, ni límites, ni traducir en términos probabilísticos las derivadas de Z. Sólo hay que saber promediar productos de las componentes del versor $\mathbf{n}$ respecto a la distribución uniforme en el ángulo sólido. Si se lo analiza con un poco más de detenimiento, es fácil convencerse de que este método es equivalente al segundo.

Algunas simplificaciones

Cuando la magnetización es paralela al campo, como en el caso de este problema, no es necesario introducir el tensor $\boldsymbol{\chi}$, basta con una constante χ. Antes encontramos que

$$\chi_{ij} = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2\delta_{ij}. \tag{59}$$

Definamos

$$\chi = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2. \tag{60}$$

El tensor susceptibilidad queda completamente determinado por χ y por el hecho de que es proporcional al tensor unidad,

$$\boldsymbol{\chi} = \chi\mathbb{1}. \tag{61}$$

Entonces, cuando el campo tiende a cero,

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \chi \mathbf{B}, \qquad B \to 0. \tag{62}$$

Cuando la magnetización es paralela al campo, podemos prescindir del carácter vectorial de la mayoría de las ecuaciones, y escribir relaciones entre las magnitudes de los vectores. La forma de afirmar de antemano que la magnetización va a ser paralela al campo es mostrando que la función de partición depende sólo del módulo de **B**.

Debido a que el momento magnético medio tiene la dirección de $\hat{b}$, su magnitud es

$$\bar{\mu} \equiv \hat{b} \cdot \langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \hat{b} \cdot \left(\mu_0 \frac{\partial \log Z}{\partial b} \cdot \hat{b} \right) = \mu_0 \frac{\partial \log Z}{\partial b}. \tag{63}$$

La Ec. (62) muestra que, cuando la intensidad del campo externo tiende a cero,

$$\bar{\mu} = \chi B, \qquad B \to 0, \tag{64}$$

de manera que

$$\chi = \left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial B} \right|_{B=0} = \beta \mu_0 \left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial b} \right|_{b=0}. \tag{65}$$

Habíamos visto que

$$Z(b) = 4\pi \frac{\sinh b}{b}. \tag{66}$$

Entonces, según la Ec. (63),

$$\bar{\mu} = \mu_0 \left(\coth b - \frac{1}{b} \right) = \mu_0 L(b). \tag{67}$$

Así, la Ec. (65) da

$$\chi = \beta \mu_0^2 L'(0) = \beta \mu_0^2 \left. \left(-\frac{1}{\sinh^2 b} + \frac{1}{b^2} \right) \right|_{b=0}. \tag{68}$$

Este límite ya lo calculamos antes, Ec. (31). El resultado es

$$\chi = \frac{1}{3} \beta \mu_0^2. \tag{69}$$

Trabajar con una susceptibilidad escalar también simplifica el segundo método de cálculo. Por definición,

$$\chi = \left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial B} \right|_{B=0} = \beta \mu_0 \left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial b} \right|_{b=0} = \beta \mu_0^2 \frac{\partial}{\partial b} \left. \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial b} \right) \right|_{b=0}. \tag{70}$$

Calculando explícitamente las derivadas,

$$\chi = \beta \mu_0^2 \left. \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial b^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial b} \right)^2 \right] \right|_{b=0}. \tag{71}$$

El objetivo es interpretar esto probabilísticamente. Elijamos ejes tales que $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Así,

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial b^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\int d\Omega\ e^{b\cos\theta}\right) = \frac{1}{Z}\int d\Omega\ \cos^2\theta\ e^{b\cos\theta} = \left\langle \cos^2\theta \right\rangle. \tag{72}$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial b} = \frac{1}{Z}\int d\Omega\ \cos\theta\ e^{b\cos\theta} = \langle \cos\theta \rangle. \tag{73}$$

Entonces, la Ec. (71) puede reescribirse como

$$\chi = \beta\left(\left\langle \mu_z^2 \right\rangle - \langle \mu_z \rangle^2\right)\Big|_{b=0}. \tag{74}$$

Si queremos conservar la notación vectorial,

$$\chi = \left[\left\langle (\hat{b}\cdot\boldsymbol{\mu})^2 \right\rangle - \left\langle \hat{b}\cdot\boldsymbol{\mu} \right\rangle^2\right]\Big|_{b=0}. \tag{75}$$

Los valores medios deben calcularse cuando la magnitud del campo tiende a cero, de modo que

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_z^2 \right\rangle\big|_{b=0} &= \frac{\mu_0^2}{4\pi}\int d\Omega\ \cos^2\theta = \frac{\mu_0^2}{3}, \\ \langle \mu_z \rangle\big|_{b=0} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\Omega\ \cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Luego, volvemos a obtener

$$\chi = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2. \tag{77}$$

El tercer método de cálculo, que es también el más sencillo, da

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{\displaystyle\int d\Omega\ \hat{b}\cdot\mathbf{n}\ e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}}{\displaystyle\int d\Omega\ e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}} \simeq \mu_0 \frac{\displaystyle\int d\Omega\ \hat{b}\cdot\mathbf{n}\ (1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})}{\displaystyle\int d\Omega\ (1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})} = \frac{\beta\mu_0^2 B}{4\pi}\int d\Omega\ (\hat{b}\cdot\mathbf{n})^2. \tag{78}$$

Volvemos a encontrarnos con la integral de $\cos^2\theta$,

$$\int d\Omega\ (\hat{b}\cdot\mathbf{n})^2 = \int d\Omega\ \cos^2\theta = \frac{4\pi}{3}. \tag{79}$$

Entonces,

$$\bar{\mu} = \frac{\beta\mu_0^2}{3}B. \tag{80}$$

El coeficiente de proporcionalidad entre $\bar{\mu}$ y B es la susceptibilidad,

$$\chi = \frac{1}{3}\beta\mu_0^2. \tag{81}$$

Analogías

Antes escribimos

$$\chi_{ij} = \beta\Big(\langle\mu_i\mu_j\rangle - \langle\mu_i\rangle\langle\mu_j\rangle\Big)\Big|_{b=0}. \tag{82}$$

Esta ecuación relaciona la susceptibilidad con las fluctuaciones en el momento dipolar. Es fácil ver que también puede escribirse como

$$\chi_{ij} = \beta\left\langle\Big(\mu_i - \langle\mu_i\rangle\Big)\Big(\mu_j - \langle\mu_j\rangle\Big)\right\rangle\Big|_{b=0}. \tag{83}$$

Esta expresión guarda una analogía con una de las formas de escribir capacidad calorífica. La energía media es

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial\beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}, \tag{84}$$

y el capacidad calorífica,

$$C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = -k\beta^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} = k\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right). \tag{85}$$

Calculando explícitamente las derivadas,

$$C = k\beta^2\left[\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} - \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2\right]. \tag{86}$$

Notar la analogía con la Ec. (71). Cada término puede interpretarse probabilísticamente. La derivada segunda de Z respecto de β genera el valor medio de E^2. La derivada primera genera el valor medio de E. Entonces,

$$C = k\beta^2\left(\left\langle E^2\right\rangle - \langle E\rangle^2\right) = k\beta^2\left\langle\left(E - \langle E\rangle\right)^2\right\rangle. \tag{87}$$

Así, la capacidad calorífica puede escribirse en términos de las fluctuaciones cuadráticas de la energía. En un sistema con N elementos, los valores medios de la energía al cuadrado serán típicamente de orden N^2. Sin embargo, la diferencia $\left\langle E^2\right\rangle - \langle E\rangle^2$ será de orden N, de modo que el calor específico resultará una cantidad intensiva. Al margen de eso, lo que queríamos resaltar es que tanto la susceptibilidad como el calor específico pueden escribirse en términos de las fluctuaciones de ciertos observables.