Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2024

Guía 6: *estadística de Fermi—Dirac*

1. En tres dimensiones, para partículas idénticas, no interactuantes, no relativistas, de masa m en una caja cúbica de volumen V, mostrar que $\log \mathcal{Z}(\beta, V, z)$ sólo depende de β y V a través del producto $\beta V^{-2/3}$, independientemente de que las partículas sean bosones o fermiones y de que se pueda o no aproximar la suma sobre estados por una integral. Determinar la relación entre la densidad de energía y la presión.

2. Para fermiones no interactuantes, considerar un estado de una partícula de energía ϵ. Calcular el número medio de ocupación $n(\epsilon, z)$. En términos de n, escribir la probabilidad de que el estado esté ocupado y la varianza del número de ocupación.

3. Mostrar que la función de partición gran canónica para fermiones no interactuantes puede escribirse como

$$\log \mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} Z_1(j\beta), \tag{1}$$

donde Z_1 es la función de partición canónica de una partícula. A partir de aquí, encontrar las funciones de partición canónicas de 1, 2, 3, 4 y 5 fermiones en términos de Z_1.

4. Asumiendo que la suma sobre los estados puede reemplazarse por una integral,* escribir, en términos de las funciones de Fermi–Dirac, la función de partición en el ensamble gran canónico para un gas ideal de fermiones de espín s contenido en una caja de volumen V. A partir de este resultado, encontrar la función de partición en el ensamble canónico para 1, 2, 3, 4 y 5 fermiones. Comparar con el problema anterior.

5. Para un gas ideal de N fermiones de espín s en una caja de volumen V, calcular ϵ_F, la energía por partícula y la presión, ambas cantidades a $T = 0$.

6. Considerar un gas ideal de N fermiones de espín s en una trampa armónica tridimensional de frecuencia ω en el límite termodinámico bajo la aproximación semiclásica.

   a) Calcular la energía de Fermi, ϵ_F.

   b) Calcular la energía por partícula cuando $T = 0$, expresada sólo en términos de ϵ_F.

7. **Masa de Chandrasekhar**. Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio a una temperatura del orden de 10^7 K y a una densidad de unos 10^{10} kg/m^3. A esta temperatura, los átomos de helio están completamente ionizados. Cada núcleo de helio tiene una masa de aproximadamente $4m_p$, donde m_p es la masa del protón.

*En general, asumir que esto es válido en el resto de los problemas.

a) Mostrar que puede considerarse que el gas de electrones está a temperatura cero, pero que, sin embargo, no puede tratarse como un gas no relativista.

b) Asumiendo que la estrella es homogénea, su energía potencial es $E_g = -3GM^2/5R$, donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio de la estrella. Calcular su energía cinética E_e en función de M y de R, despreciando la contribución de los núcleos y aproximando la relación de dispersión de los electrones a primer orden en m^2,

$$\epsilon = \sqrt{m^2c^4 + (pc)^2} \simeq pc + \frac{m^2c^3}{2p}. \tag{2}$$

c) En equilibrio, el radio toma el valor que minimiza la energía (¿por qué?). Mostrar que existe una masa límite M_C tal que, para $M > M_C$, no hay ningún radio de equilibrio. Esa masa se conoce como el límite de Chandrasekhar. Calcular M_C en unidades de la masa solar, $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg.

d) Mostrar que no existiría una masa límite si el gas de electrones fuera no relativista.

8. Un modelo simplificado de una estrella de neutrones asume que la estrella consiste en un gas ideal relativista de fermiones de masa m y espín $\frac{1}{2}$. El gas está a temperatura cero. Considerar una región de volumen V en equilibrio local que, en promedio, contiene N partículas. Si $\epsilon_0 = mc^2$, la energía de una partícula con momento $\mathbf{p}$ es

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\epsilon_0^2 + (pc)^2}. \tag{3}$$

   a) Mostrar que Vp_F^3 es constante, donde p_F es el impulso de Fermi.

   b) Mostrar que la energía puede expresarse como

$$U = 3N\epsilon_0 \int_0^1 dx\, x^2 \sqrt{1 + x^2 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2}. \tag{4}$$

   c) Mostrar que la presión está dada por

$$P = \frac{N}{V}\frac{p_F^2}{m} \int_0^1 dx\, \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^2 \left(\frac{p_F}{mc}\right)^2}}. \tag{5}$$

   d) Determinar la primera corrección de masa finita para el caso ultrarrelativista y la primera corrección en potencias inversas de c para el caso no relativista.

   e) Verificar estos resultados calculando explícitamente la integral del ítem c).

9. **Paramagnetismo de Pauli I**. Un gas ideal de N electrones está contenido en una caja de volumen V. Los electrones interactúan con un campo magnético externo $\mathbf{H} = H\hat{z}$. La energía de interacción es $\epsilon_s = s\mu_e H$, donde s es el signo de la proyección del espín en la dirección $\hat{z}$ y μ_e es el valor absoluto del momento magnético de los electrones. El sistema está a temperatura cero.

a) Escribir la ecuación que determina la energía de Fermi en función de N, V y H. Representar gráficamente.

b) Calcular la magnetización por partícula M en función de la densidad de partículas, de la energía de Fermi y H.

c) Calcular la susceptibilidad, es decir, la derivada de M respecto de H cuando H tiende a cero. El resultado debe quedar escrito únicamente en términos de ϵ_F.

10. **Paramagnetismo de Pauli II**. Considere un gas ideal de N electrones en una trampa armónica tridimensional de frecuencia ω en el límite termodinámico. La temperatura es cero. Los electrones interactúan con un campo magnético externo $\mathbf{H} = H\hat{z}$. Es válido aplicar la aproximación semiclásica.

    a) Escribir la ecuación que determina la energía de Fermi como función de N, ω y H.

    b) Escribir la magnetización por partícula en función de la energía de Fermi, N, ω y H.

    c) Calcular la susceptibilidad. El resultado debe quedar escrito sólo en términos de ϵ_F.

11. Para un gas ideal de N fermiones de espín s confinado en una superficie de área A:

    a) Escribir las ecuaciones paramétricas que determinan P y U como funciones de T, A y N.

    b) Encontrar la energía de Fermi en términos de la densidad de partículas.

    c) Mostrar que el potencial químico, como función de la temperatura, es:

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 + \frac{1}{\beta\epsilon_F} \log\left(1 - e^{-\beta\epsilon_F}\right) \right]. \tag{6}$$

    d) Escribir las primeras correcciones de temperatura finita para $\mu(T)$ y mostrar que el lema de Sommerfeld no es aplicable en esta situación.

    e) Calcular el calor específico cuando el gas está altamente degenerado.

12. a) Para un gas ideal de fermiones de espín s, escribir las ecuaciones paramétricas que determinan μ, S, P, U y c_V como funciones de T, V y N.

    b) Calcular estas cantidades para $T = 0$ y obtener sus primeras correcciones a temperatura finita.

    c) Mostrar que, para $z \ll 1$, se recupera el límite clásico. Encontrar las primeras correcciones cuánticas para la energía, el calor específico y la ecuación de estado.

    d) Graficar PV/N y c_V en función de T y verificar que se obtienen los comportamientos esperados para temperaturas muy bajas y temperaturas muy altas.

13. Ídem al problema anterior, pero ahora considerar que el gas es ultrarrelativista.

14. Considere un gas ideal de N fermiones de espín s en una trampa armónica tridimensional de frecuencia ω en el límite termodinámico y bajo la aproximación semiclásica.

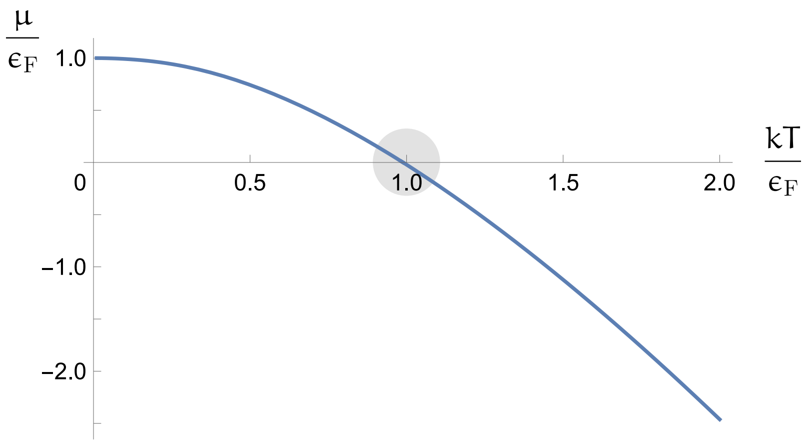
    a) Escribir las ecuaciones paramétricas que determinan μ, S, U y c_ω en función de T, ω y N.

    b) Calcular estas cantidades para $T = 0$ y obtener sus primeras correcciones a temperatura finita.

    c) Mostrar que, para $z \ll 1$, se recupera el límite clásico. Encontrar las primeras correcciones cuánticas para la energía y al calor específico.

15. (Dalvit *et al.*, Problema 4.20a). Un recipiente de volumen V está dividido en dos compartimientos mediante un tabique impermeable, móvil y conductor del calor. En un compartimiento hay N fermiones de espín $\frac{1}{2}$, y en el otro N fermiones de espín $\frac{3}{2}$. Las dos clases de partículas tienen la misma masa. El sistema está a temperatura T. Encontrar la relación V_1/V_2 entre los volúmenes que ocupa cada gas. Hacer el cálculo primero para $T = 0$ y luego encontrar la primera corrección para $T > 0$.

16. Para terminar, un problema fácil. Un gas de N fermiones de espín s y masa m está contenido en un recipiente de volumen V en tres dimensiones. La figura muestra el potencial químico en función de la temperatura.



    a) Mire la figura. Tiene cinco segundos para responder: en términos de la energía de Fermi, ¿para qué valor de kT es μ igual a cero?

    b) Ahora tómese el tiempo que necesite: en términos de la energía de Fermi, ¿para qué valor de kT es μ igual a cero?

    c) A partir de la primera corrección de temperatura finita para el potencial químico, estime el valor de kT para el cual μ es igual a cero y compare con el resultado exacto.

    d) En general, para un gas en d dimensiones, encontrar y graficar la temperatura a la que se anula el potencial químico. ¿Para qué valor de d el potencial químico se anula cuando $kT = \epsilon_F$?