Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2024

SEGUNDO PARCIAL – 27/11*

■ **1**. Un gas ideal **ultrarrelativista** de N electrones está contenido en una caja de volumen V. Los electrones interactúan con un campo magnético $\mathbf{H} = H\hat{z}$. La energía de interacción es $\epsilon_s = s\mu_e H$, donde s es el signo de la proyección del espín en la dirección $\hat{z}$ y μ_e es el valor absoluto del momento magnético de los electrones. El sistema está a temperatura cero.

a) Escriba la ecuación que determina la energía de Fermi en función de N, V y H.

b) ¿Cuál es el valor máximo de la densidad tal que todos los electrones tienen la misma proyección del espín sobre el eje z? La respuesta debe quedar sólo en términos de H.

c) Escriba la magnetización por partícula M en función de la densidad y de H.

d) Calcule la susceptibilidad. El resultado debe quedar escrito sólo en términos de ϵ_F.

■ **2**. Un gas ideal de bosones de espín cero y masa m está confinado en el interior de un cilindro de radio a y altura L, cuyo eje de simetría es el eje z. Además, existe un potencial armónico con simetría cilíndrica, $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$. Se define $\alpha = \frac{1}{2}\beta m\omega^2 a^2$.

a) Calcule el logaritmo de la función de partición en el ensamble gran canónico.

b) Muestre que, en el límite termodinámico, este sistema tiene una transición de fase y, fijada la densidad, escriba la ecuación que determina la temperatura crítica.

c) Cuando $\omega = 0$, debe recuperarse la expresión de la temperatura crítica para el gas en una caja sin potencial, $T_c^{(0)}$. Cuando $\omega > 0$, $T_c = T_c^{(0)} + \Delta T_c$. Encuentre una expresión aproximada para ΔT_c asumiendo que $\alpha_c \ll 1$.

Fórmulas útiles:

$$g_\nu\left(e^{-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\zeta(\nu-k)\alpha^k, \qquad \nu \notin \mathbb{Z};$$

$$g_\nu\left(e^{-\alpha}\right) = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left(\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{k} - \log\alpha\right)\alpha^{\nu-1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu-1}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\zeta(\nu-k)\alpha^k, \qquad \nu \in \mathbb{Z}.$$

*zanellaj@df.uba.ar

■ **3**. En cada vértice de un polígono regular de N lados hay un espín. Los espines interactúan a primeros vecinos con una constante de acoplamiento J. En el centro del polígono hay otro espín, que está acoplado a cada uno de los espines de los vértices con una constante de acoplamiento J'. Además, hay un campo magnético externo B. Se definen $K = \beta J$, $K' = \beta J'$ y $b = \beta\mu B$, donde μ es el momento magnético de los espines.

a) Calcule la función de partición canónica del sistema.

b) Calcule el valor medio de los espines de los vértices y el valor medio del espín central.

Ayuda: escriba la función de partición como una suma de dos términos, uno correspondiente a $s_0 = 1$ y el otro a $s_0 = -1$. Para el ítem b, puede ser útil acoplar a cada tipo de espín con un campo distinto. Trate de dejar todo escrito de manera compacta en términos de los autovalores de la matriz de transferencia y de la magnetización por espín de la cadena infinita.