

Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2024

SEGUNDO RECUPERATORIO – RESUELTO *

■ **1.** Un gas ideal de N electrones de masa m está contenido en una caja de volumen V a temperatura T . Se define $n = N/V$. Los electrones interactúan con un campo magnético $\mathbf{H} = H\hat{z}$. La energía de interacción es $\epsilon_s = s\mu_e H$, donde s es el signo de la proyección del espín en la dirección \hat{z} y μ_e es el valor absoluto del momento magnético de los electrones.

- a) Escriba la ecuación que determina z en función de n , T y H .
- b) Escriba la magnetización por partícula M en función de n , T , z y H .
- c) Calcule la susceptibilidad en función de n , T y z .
- d) Para altas temperaturas, escriba la susceptibilidad como función de n y T , conservando la primera corrección cuántica en potencias de la densidad. (Necesitará calcular z hasta segundo orden en la densidad).

■ **Solución.** El número de partículas está determinado por la siguiente ecuación:

$$N = \frac{V}{h^3} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \frac{1}{1 + z^{-1} e^{\beta \epsilon(\mathbf{p}, s)}}, \quad (1)$$

donde

$$\epsilon(\mathbf{p}, s) = \frac{p^2}{2m} + s\mu_e H. \quad (2)$$

Explícitamente,

$$N = N_+ + N_- = \frac{V}{\lambda^3} \left[f_{3/2}(ze^{-\beta\mu_e H}) + f_{3/2}(ze^{\beta\mu_e H}) \right], \quad (3)$$

donde N_{\pm} son las poblaciones de electrones con cada proyección del espín,

$$N_{\pm} = \frac{V}{\lambda^3} f_{3/2}(ze^{\mp\beta\mu_e H}). \quad (4)$$

La ecuación que determina la fugacidad puede escribirse como

$$n\lambda^3 = f_{3/2}(ze^{-\beta\mu_e H}) + f_{3/2}(ze^{\beta\mu_e H}). \quad (5)$$

Debido a que el momento magnético del electrón es antiparalelo a su espín,

$$M = \frac{\mu_e}{N}(N_- - N_+) = \frac{\mu_e}{n\lambda^3} \left[f_{3/2}(ze^{\beta\mu_e H}) - f_{3/2}(ze^{-\beta\mu_e H}) \right] \quad (6)$$

*zanellaj@df.uba.ar

Teniendo en cuenta que z es función de H ,

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H=0} = \frac{\mu_e}{n\lambda^3} \left[\left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial H} \Big|_{H=0} + \beta \mu_e \right) - \left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial H} \Big|_{H=0} - \beta \mu_e \right) \right] f_{1/2}(z) = \frac{2\mu_e^2 \beta}{n\lambda^3} f_{1/2}(z). \quad (7)$$

Para estudiar el régimen de altas temperaturas, incluyendo la primera corrección cuántica, es necesario calcular z hasta orden n^2 . Cuando $H = 0$, la Ec. (5) se lee como

$$\frac{n\lambda^3}{2} = f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots \quad (8)$$

El desarrollo que buscamos es de la forma

$$z = a_1 n\lambda^3 + a_2 (n\lambda^3)^2 + \dots \quad (9)$$

Sustituyendo en la Ec. (8), obtenemos ecuaciones para los coeficientes a_i ,

$$\frac{1}{2} = a_1, \quad 0 = a_2 - \frac{a_1^2}{2^{3/2}}. \quad (10)$$

Entonces,

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2^{7/2}}, \quad (11)$$

y

$$z = \frac{1}{2} n\lambda^3 + \frac{1}{2^{7/2}} (n\lambda^3)^2 + \dots \quad (12)$$

Luego, volviendo a la Ec. (7),

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2\mu_e^2 \beta}{n\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{1/2}} + \dots \right) = \frac{2\mu_e^2 \beta}{n\lambda^3} \left[\frac{n\lambda^3}{2} + \frac{1}{2^{7/2}} (n\lambda^3)^2 - \frac{1}{2^{1/2}} \left(\frac{n\lambda^3}{2} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \mu_e^2 \beta \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} n\lambda^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (13)$$

El primer término corresponde a la ley de Curie.

■ **2.** Un gas ideal de N bosones de masa m y espín cero está en un cilindro infinito cuyo eje de simetría es el eje x . La sección transversal del cilindro tiene área A . Hay un potencial

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \quad (14)$$

- Calcule el logaritmo de la función de partición en el ensamble gran canónico.
- En el límite termodinámico, este sistema ¿tiene una transición de fase a temperatura finita? De ser así, ¿cuál es la condición crítica?

■ **Solución.** En la aproximación semiclásica, el logaritmo de la función de partición es

$$\log \mathcal{Z} = -\log(1-z) - \frac{A}{\hbar^3} \int d^3p \int_{-\infty}^{\infty} dx \log \left\{ 1 - z \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

La integral puede convertirse en una integral en cuatro dimensiones,

$$\begin{aligned} \log \mathcal{Z} &= -\log(1-z) - \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} (2m)^{3/2} \frac{A}{\hbar^3 \beta^2} \int d^4q \log(1 - ze^{-q^2}) \\ &= -\log(1-z) - \frac{8\pi^2 mA}{\hbar^3 \omega \beta^2} \int_0^{\infty} dq q^3 \log(1 - ze^{-q^2}) \\ &= -\log(1-z) - \frac{4\pi^2 mA}{\hbar^3 \omega \beta^2} \int_0^{\infty} dy y \log(1 - ze^{-y}). \end{aligned} \quad (16)$$

La última integral se resuelve por partes,

$$\int_0^{\infty} dy y \log(1 - ze^{-y}) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^2}{z^{-1}e^y - 1} = -g_3(z). \quad (17)$$

Finalmente,

$$\log \mathcal{Z} = -\log(1-z) + \frac{4\pi^2 mA}{\hbar^3 \omega \beta^2} g_3(z) = -\log(1-z) + \frac{A}{\lambda^2 \hbar \omega \beta} g_3(z). \quad (18)$$

La relación entre la fugacidad y el número de partículas es

$$N = z \frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial z} = \frac{z}{1-z} + \frac{A}{\lambda^2 \hbar \omega \beta} g_2(z). \quad (19)$$

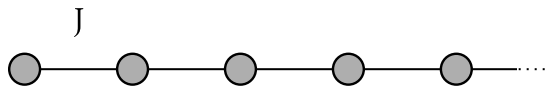
El número de partículas en los estados excitados es

$$N_{\text{exc}} = \frac{A}{\lambda^2 \hbar \omega \beta} g_2(z). \quad (20)$$

Sin entrar en los detalles de cómo tomar el límite termodinámico, cuando $z \rightarrow 1^-$, esta expresión está acotada. Por lo tanto, el sistema va a tener una transición de fase. La condición crítica es

$$\left[\frac{A}{N \lambda^2 \hbar \omega \beta} \zeta(2) \right]_c = 1. \quad (21)$$

■ **3.** Calcule el valor medio del primer espín de una cadena de Ising semiinfinita. La constante de acoplamiento es J y hay un campo externo B . Se define $K = \beta J$ y $b = \beta \mu B$, donde μ es el momento magnético de los espines.



■ **Solución.** Consideremos una cadena de N espines; luego tomaremos el límite $N \rightarrow \infty$. La función de partición puede escribirse mediante la matriz de transferencia,

$$Z_N = \sum_{\{s\}} q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \cdots q_{s_{N-1} s_N} Q_{s_N s_1} = \text{Tr}(\mathbf{q}^{N-1} \mathbf{Q}), \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} xy & x^{-1} \\ x^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & y^{-1} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

con

$$x = e^K, \quad y = e^b. \quad (24)$$

El valor medio del primer espín es

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s\}} s_1 q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \cdots q_{s_{N-1} s_N} Q_{s_N s_1} = \frac{1}{Z_N} \text{Tr}(\mathbf{s} \mathbf{q}^{N-1} \mathbf{Q}), \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Explícitamente,

$$\mathbf{q}^{N-1} = \lambda_+^{N-1} \mathbf{u} \mathbf{u} + \lambda_-^{N-1} \mathbf{v} \mathbf{v}, \quad (27)$$

donde

$$\lambda_{\pm} = e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b} \right), \quad (28)$$

y

$$\mathbf{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \mathbf{v} = (\sin \varphi, -\cos \varphi), \quad (29)$$

con

$$\cot 2\varphi = e^{2K} \sinh b. \quad (30)$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \frac{\cot 2\varphi}{\sqrt{1 + \cot^2 2\varphi}} = \frac{\sinh b}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b}}, \\ \sin 2\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 2\varphi}} = \frac{e^{-2K}}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Puesto que vamos a tomar el límite $N \rightarrow \infty$, podemos asumir que $N \gg 1$ y escribir

$$\mathbf{q}^{N-1} \simeq \lambda_+^{N-1} \mathbf{u}\mathbf{u} = \lambda_+^{N-1} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}\mathbf{q}^{N-1}\mathbf{Q} &\simeq \lambda_+^{N-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} & 1 \\ 1 & \mathbf{y}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \lambda_+^{N-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi & \dots \\ \dots & -\sin \varphi \cos \varphi - \mathbf{y}^{-1} \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{s}\mathbf{q}^{N-1}\mathbf{Q}) &\simeq \lambda_+^{N-1} (\mathbf{y} \cos^2 \varphi - \mathbf{y}^{-1} \sin^2 \varphi) = \lambda_+^{N-1} (\sinh \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b} \cos 2\varphi) \\ &= \lambda_+^{N-1} \left(\sinh \mathbf{b} + \frac{\cosh \mathbf{b} \sinh \mathbf{b}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}} \right) = e^{-\mathbf{K}} \lambda_+^N \frac{\sinh \mathbf{b}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Por otro lado, la función de partición está dada por la traza del siguiente producto

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{N-1}\mathbf{Q} &\simeq \lambda_+^{N-1} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} & 1 \\ 1 & \mathbf{y}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \lambda_+^{N-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi & \dots \\ \dots & \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{y}^{-1} \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} Z_N &\simeq \lambda_+^{N-1} (\mathbf{y} \cos^2 \varphi + \mathbf{y}^{-1} \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi) = \lambda_+^{N-1} (\cosh \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b} \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \\ &= \lambda_+^{N-1} \left(\cosh \mathbf{b} + \frac{\sinh^2 \mathbf{b}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}} + \frac{e^{-2\mathbf{K}}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}} \right) \\ &= \frac{\lambda_+^{N-1}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}} (e^{-2\mathbf{K}} + e^{-\mathbf{K}} \lambda_+ \cosh \mathbf{b} - 1) = \frac{e^{-\mathbf{K}} \lambda_+^{N-1}}{\sqrt{e^{-4\mathbf{K}} + \sinh^2 \mathbf{b}}} (\lambda_+ \cosh \mathbf{b} - 2 \sinh \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (36)$$

Finalmente, cuando $N \rightarrow \infty$

$$\langle s_1 \rangle = \frac{\lambda_+ \sinh b}{\lambda_+ \cosh b - 2 \sinh K}. \quad (37)$$

Cuando $K = 0$ deberíamos obtener el resultado del sistema de dos niveles. En efecto,

$$\langle s_1 \rangle = \tanh b. \quad (38)$$