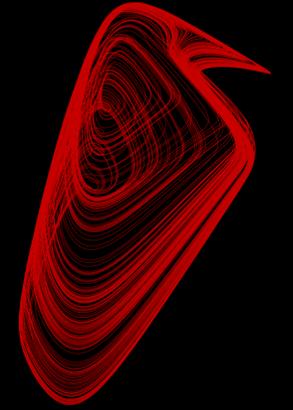


# El origen de la riqueza espectral sonora





Ya en la parcelación del espectro juega un papel el que generamos música con sonidos espectralmente ricos

1. La fuente
2. Los filtros

Ya en la parcelación del espectro juega un papel  
el que generamos música con sonidos espectralmente ricos

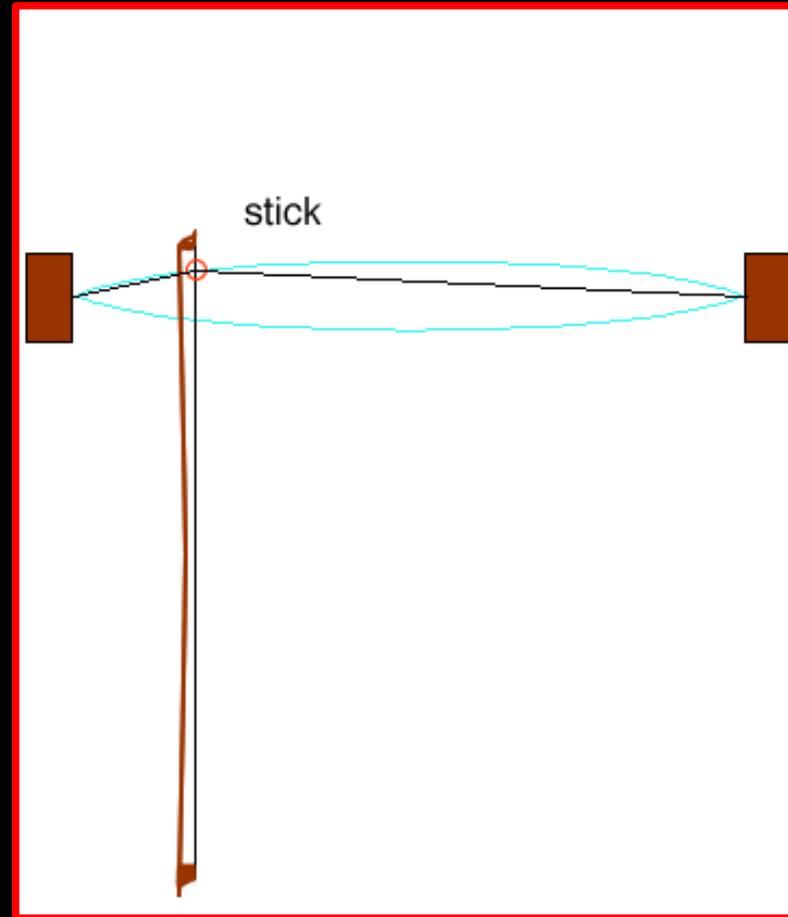
1. La fuente

2. Los filtros

Condiciones iniciales que activan  
multiplicidad de modos

Dinamica no lineal de la misma

## La cuerda tocada con un arco



Cuando el arco se mueve sobre la cuerda, de a intervalos de tiempo se pegan los pelos del arco y la cuerda, hasta que la cuerda se libera. El proceso se repite una y otra vez.

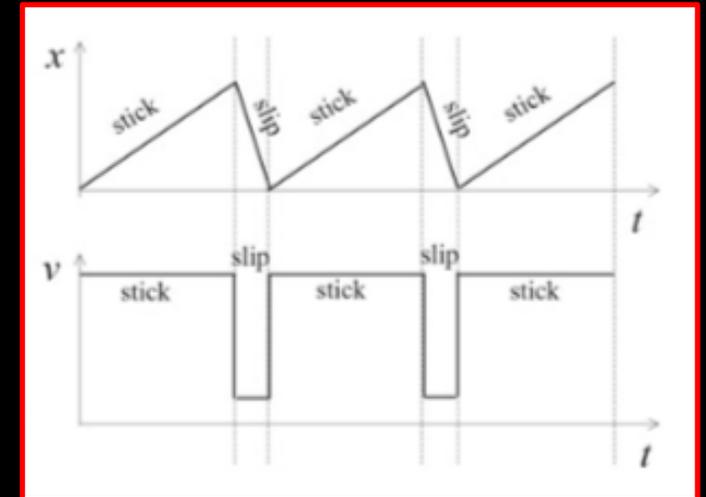
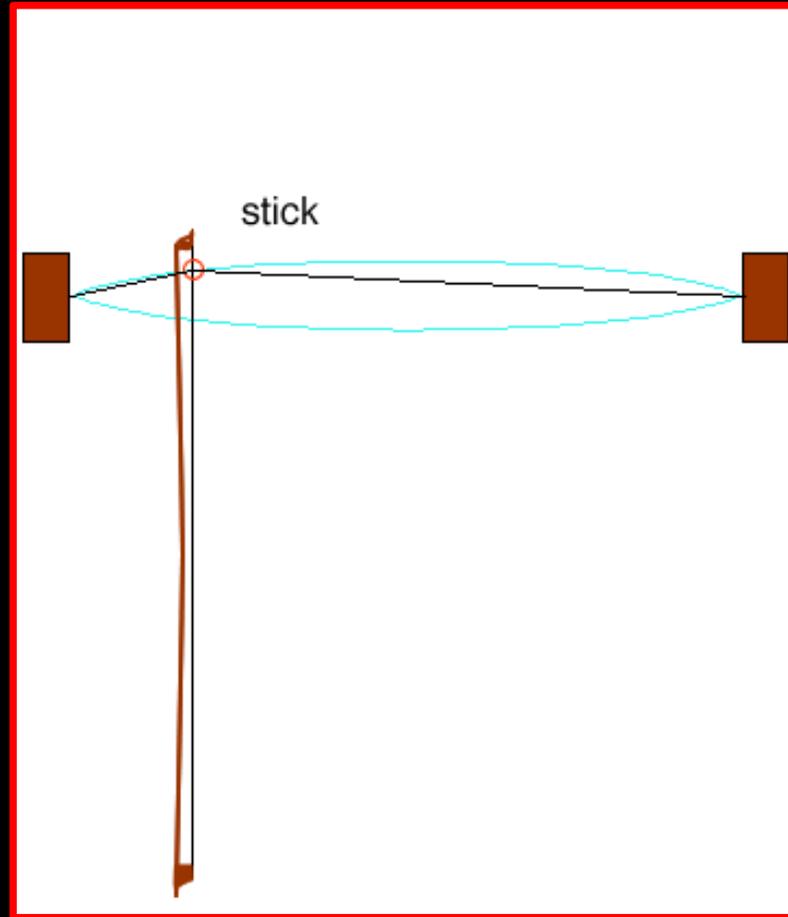
## La fricción



Proceso  
estático

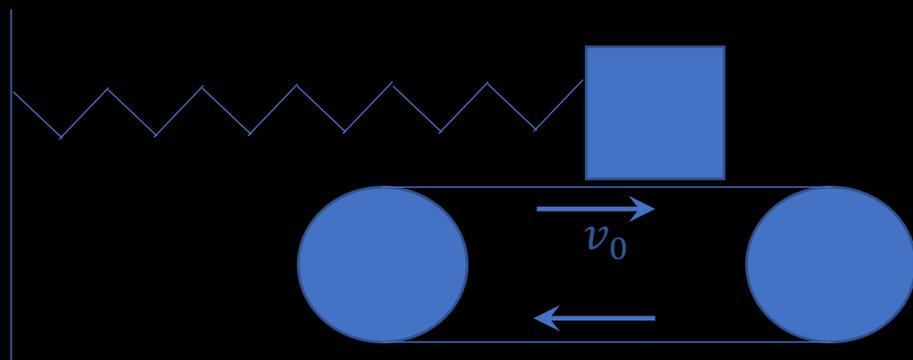
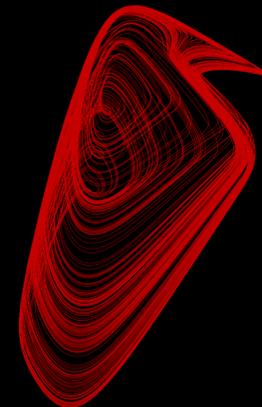
Proceso  
dinámico

## La cuerda tocada con un arco

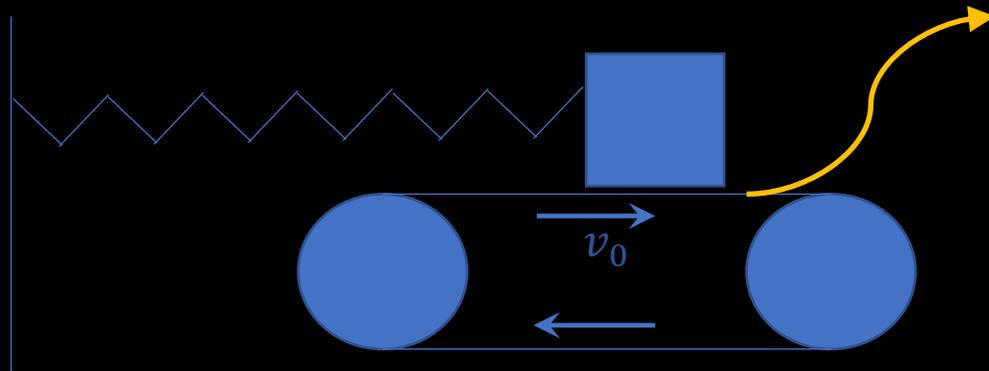
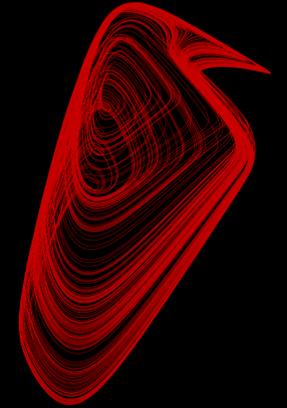


Intentemos modelar esta dinamica, con el fin de entender el origen del contenido espectral de los sonidos generados por este instrumento.

Vamos a comenzar con un ejercicio para modelar la dinamica de la cuerda.

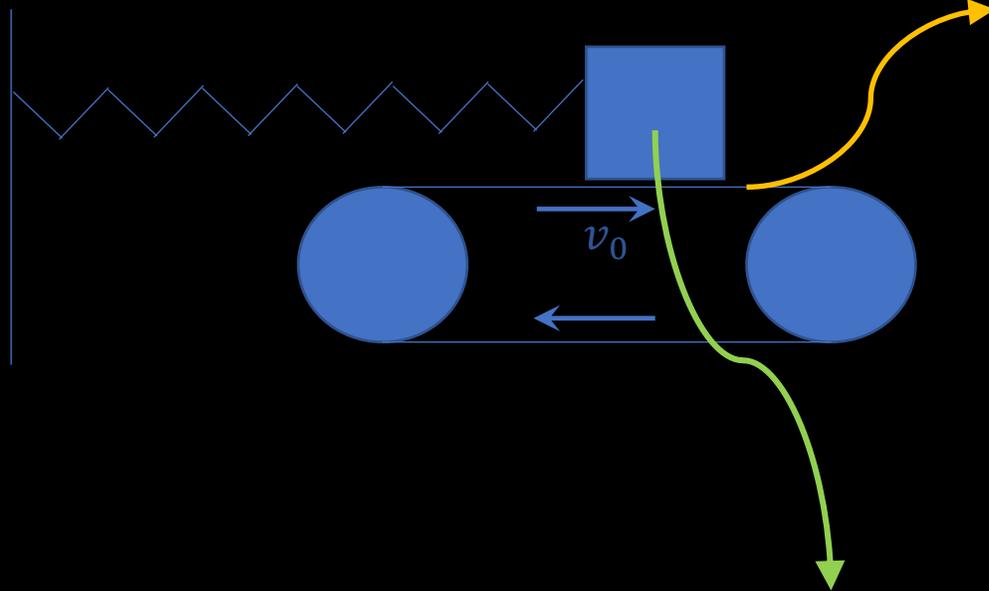
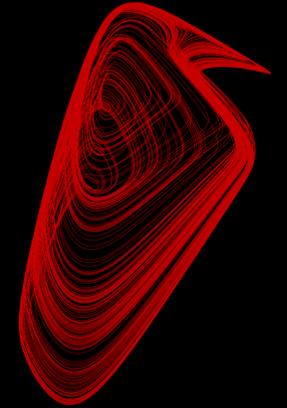


Vamos a comenzar con un ejercicio para modelar la dinamica de la cuerda.



El arco es representado por esta cinta, que en lo que al bloque se refiere, se mueve siempre en la misma direccion

Vamos a comenzar con un ejercicio para modelar la dinamica de la cuerda.

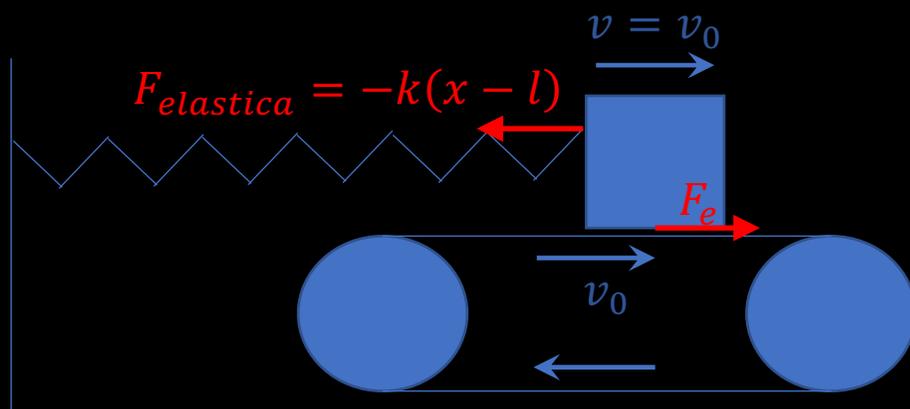
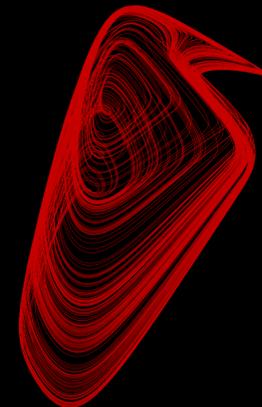


El arco es representado por esta cinta, que en lo que al bloque se refiere, se mueve siempre en la misma direccion

La cuerda se representa por el bloque y el resorte (el trocito en contacto con el arco, por el bloque), y el resto por el resorte

Etapa de arrastre

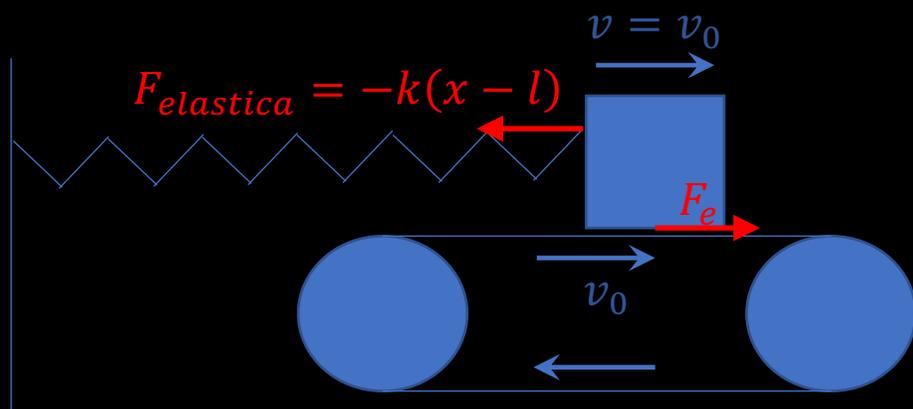
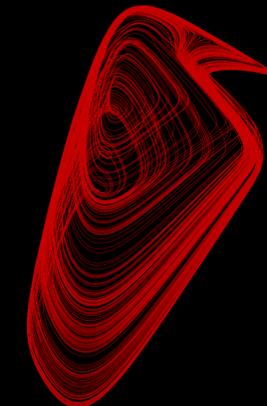
Velocidad constante  
(i.e. Fuerza total suma cero)



$F_e$  la fuerza de roce estatica

Etapa de arrastre

Velocidad constante  
(i.e. Fuerza total suma cero)



mientras

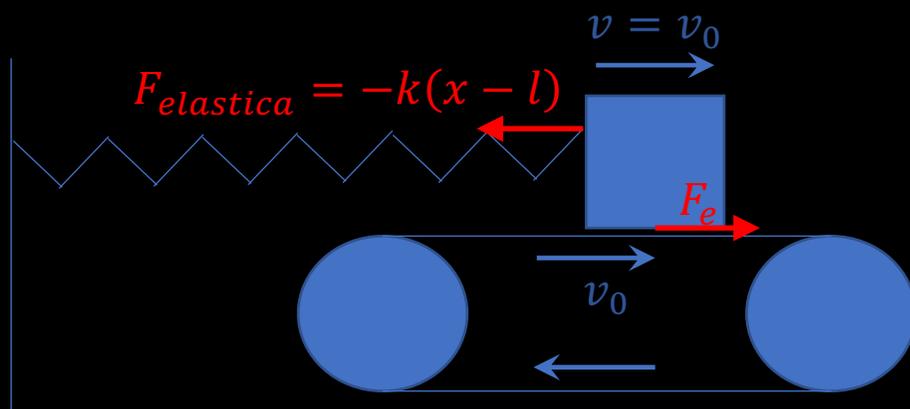
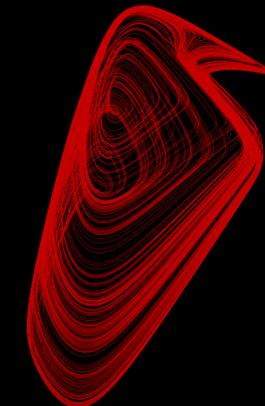
$$F_e < \mu_e mg$$

$$F_t = -k(x - l) + F_e = 0$$

O sea que la fuerza de roce tomara valores tan grandes como la fuerza elastica

Etapa de arrastre

Velocidad constante  
(i.e. Fuerza total suma cero)



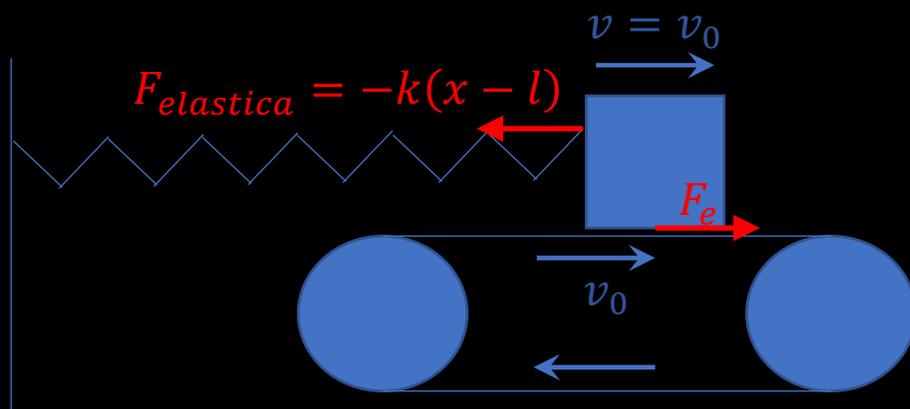
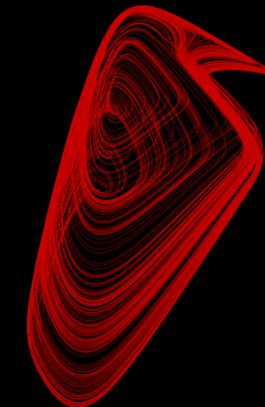
$$F_e < \mu_e mg$$

$$F_t = -k(x - l) + F_e = 0$$

La fuerza elastica ira creciendo a medida que se estira el resorte, y la de roce estatico ira aumentando mientras  $F_e < \mu_e mg$

Etapa de arrastre

Velocidad constante  
(i.e. Fuerza total suma cero)



$$F_e < \mu_e mg$$

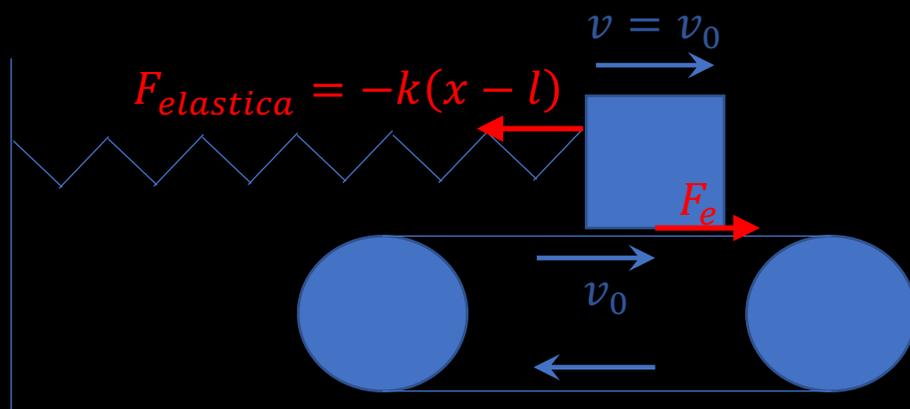
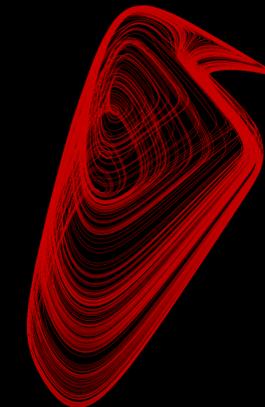
$$F_t = -k(x - l) + F_e = 0$$

hasta que

$$x_1 = \frac{\mu_e mg}{k} + l$$

Etapa de arrastre

Velocidad constante  
(i.e. Fuerza total suma cero)



$$F_e < \mu_e mg$$

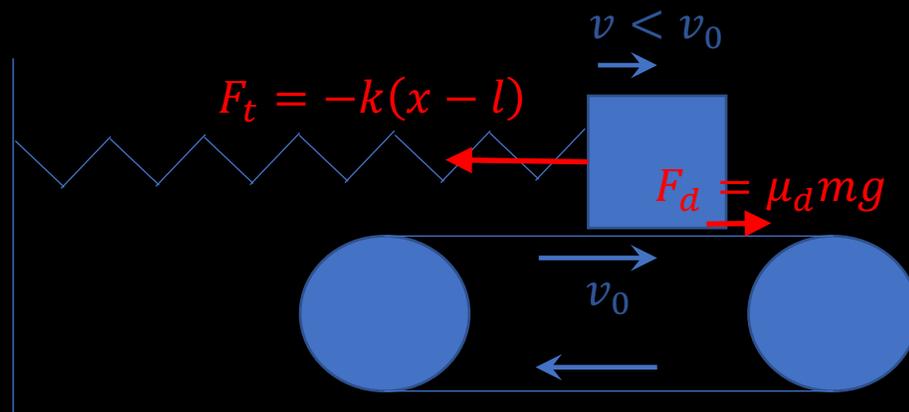
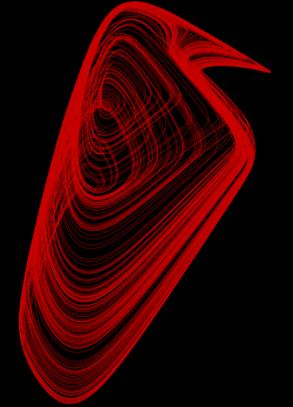
$$F_t = -k(x - l) + F_e = 0$$

O sea, hasta que

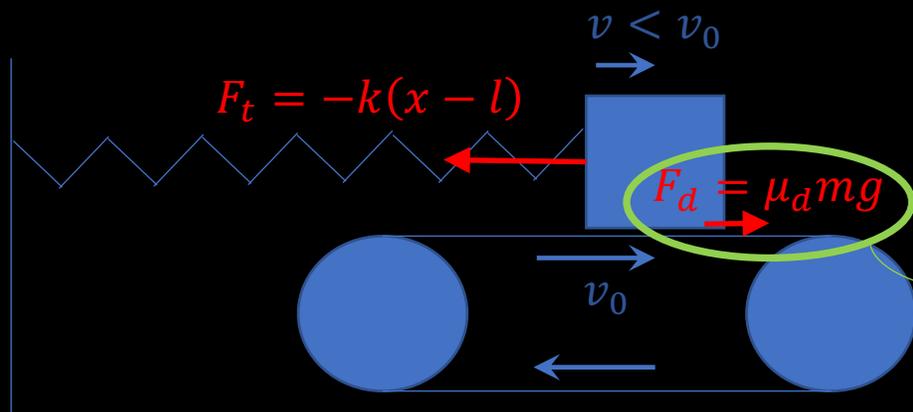
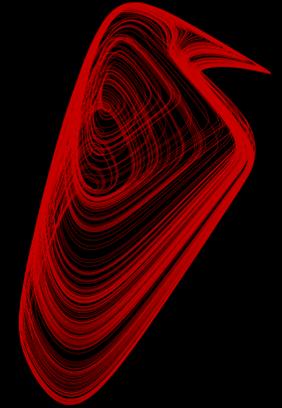
$$x_1 = \frac{\mu_e mg}{k} + l$$

Hasta que se alcance esa posición, el movimiento es uniforme, ya que la fuerza total es nula

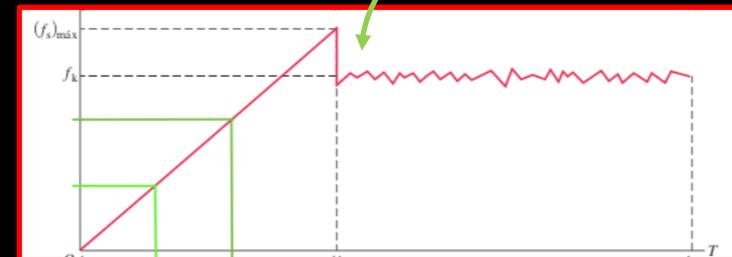
En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



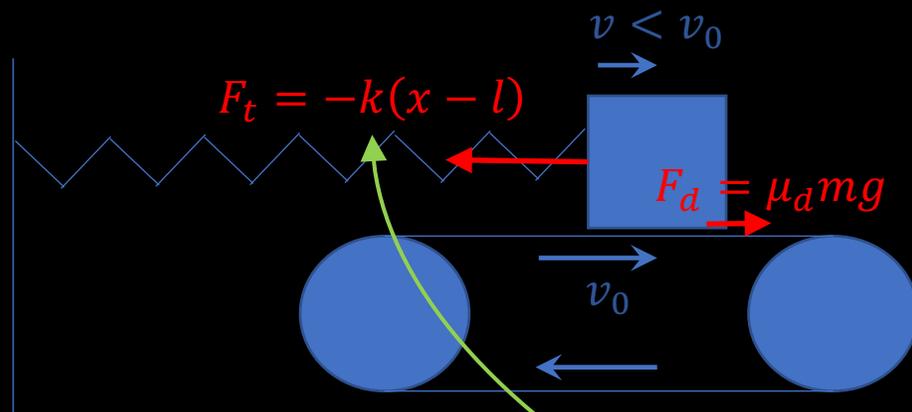
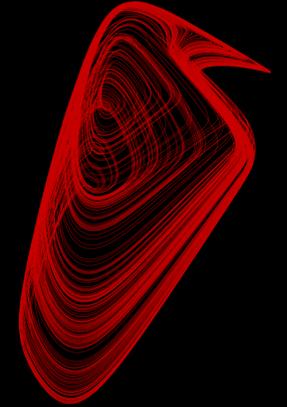
En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



O sea, la fuerza hacia adelante se pega una fuerte y repentina disminucion



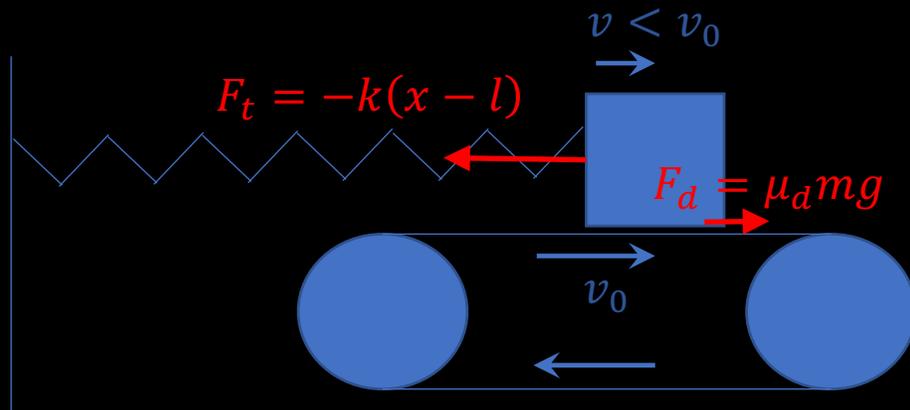
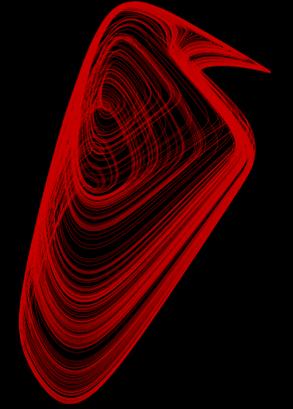
En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



Entonces en la segunda etapa, el problema es el de una partícula con **movimiento armonico** alrededor de  $x_1$ , con amplitud  $\Delta x$

Pues hay una fuerza elastica, que supera a la fuerza constante (es como un pendulo en presencia de gravedad, al ser apartado del equilibrio)

En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



$$F_t = -k(x - l) + \mu_d mg$$

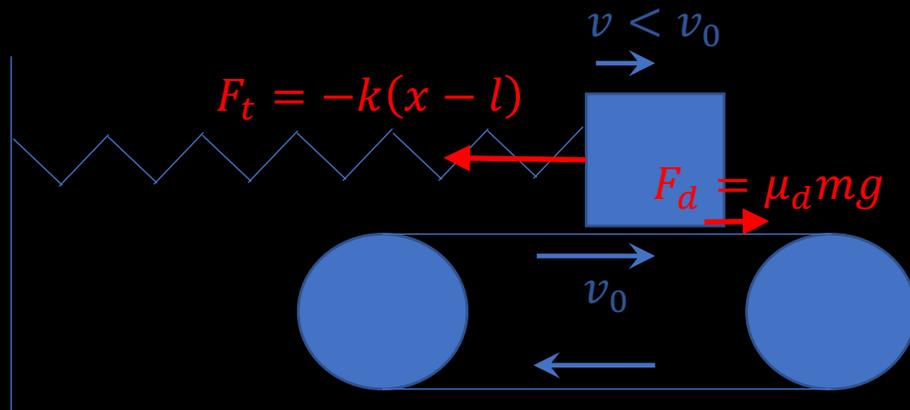
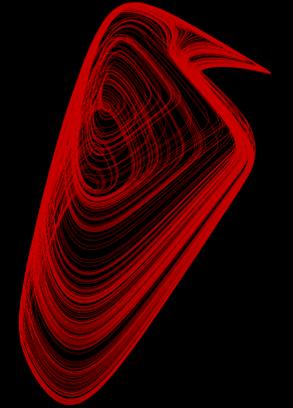
Y existe una oscilacion alrededor de

$$x_{\text{centro}} = \frac{\mu_d mg}{k} + l$$

Posicion  
De equilibrio

Entonces en la segunda etapa, el problema es el de una particula con movimiento armonico alrededor de  $x_1$ , con amplitud  $\Delta x$

En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



$$F_t = -k(x - l) + \mu_d mg$$

Y existe una oscilacion alrededor de

$$x_{\text{centro}} = \frac{\mu_d mg}{k} + l$$

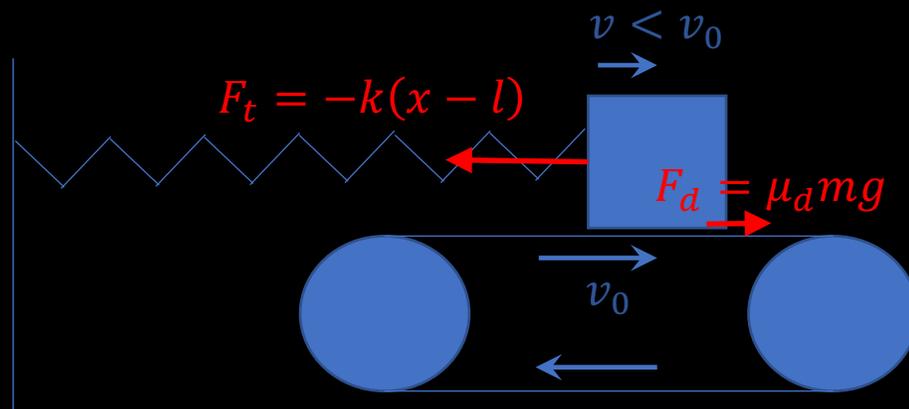
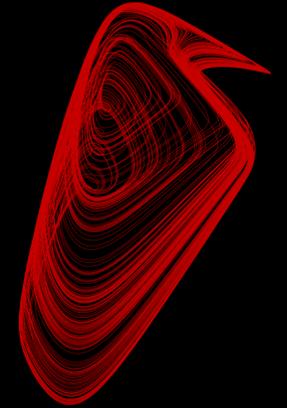
Posicion  
De equilibrio

Entonces en la segunda etapa, el problema es el de una particula con movimiento armonico alrededor de  $x_1$ , con amplitud  $\Delta x$

$$\Delta x = x_1 - x_{\text{centro}} = (\mu_e - \mu_d) \frac{gm}{k}$$

Apartamiento  
al arrancar

En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



Entonces en la segunda etapa, el problema es el de una partícula con movimiento armónico alrededor de  $x_1$ , con amplitud  $\Delta x$

$$F_t = -k(x - l) + \mu_d mg$$

Y existe una oscilacion alrededor de

$$x_{\text{centro}} = \frac{\mu_d mg}{k} + l$$

Posicion  
De equilibrio

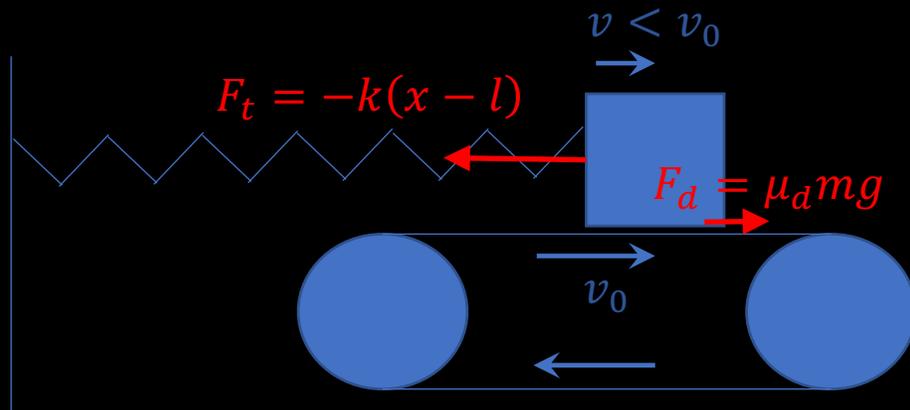
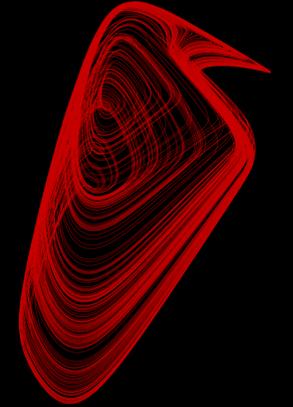
$$\Delta x = x_1 - x_{\text{centro}} = (\mu_e - \mu_d) \frac{gm}{k}$$

Apartamiento  
al arrancar

$$A = \sqrt{(\mu_e - \mu_d)^2 g^2 \left(\frac{m}{k}\right)^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}$$

Amplitud  
del mov.  
armónico

En la segunda etapa, entra en juego la fuerza de roce dinamica, menor que la mayor fuerza de roce estatica alcanzada



Entonces en la segunda etapa, el problema es el de una particula con movimiento armonico alrededor de  $x_1$ , con amplitud  $\Delta x$

$$F_t = -k(x - l) + \mu_d mg$$

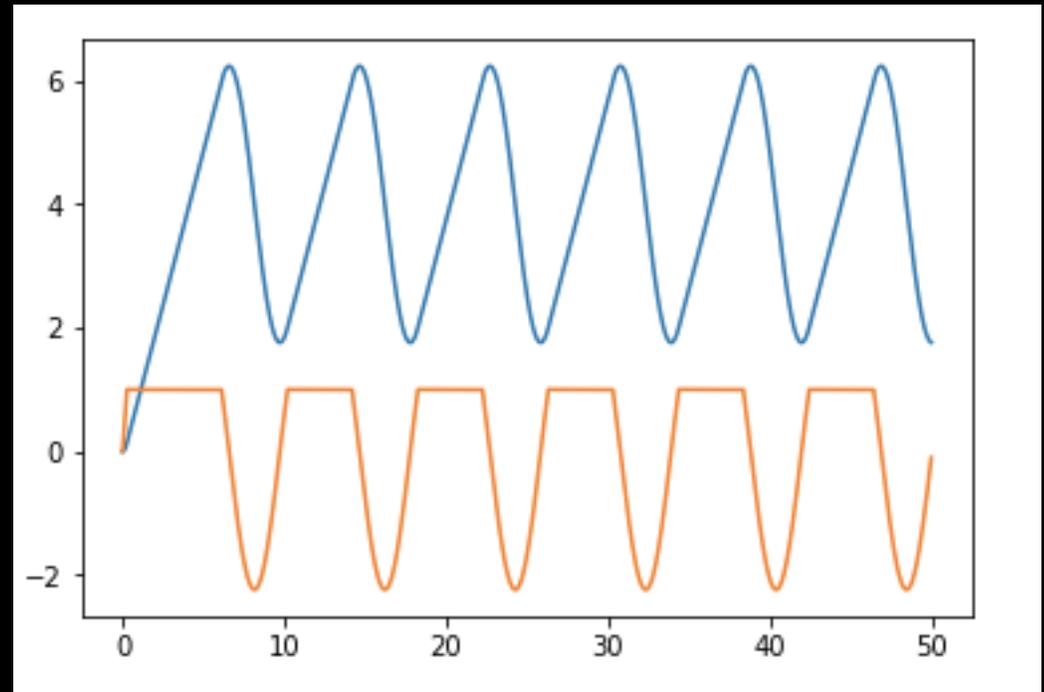
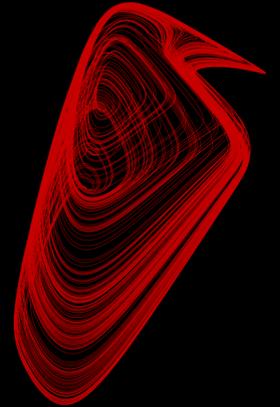
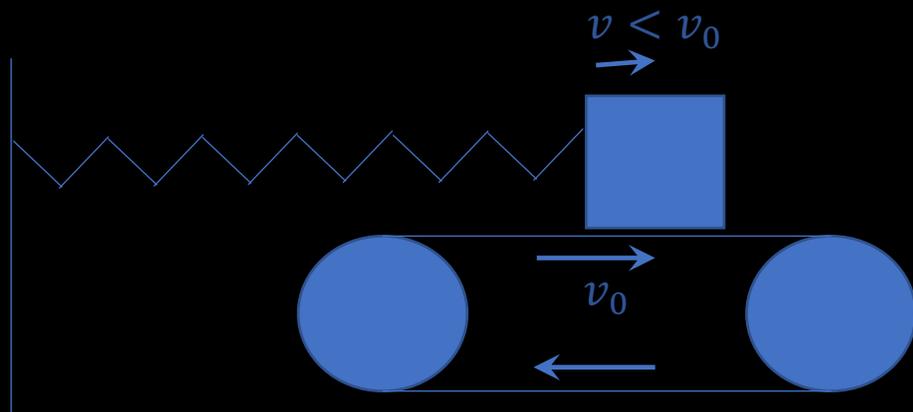
Y existe una oscilacion alrededor de

$$x_{\text{centro}} = \frac{\mu_d mg}{k} + l$$

$$\Delta x = x_1 - x_{\text{centro}} = (\mu_e - \mu_d) \frac{gm}{k}$$

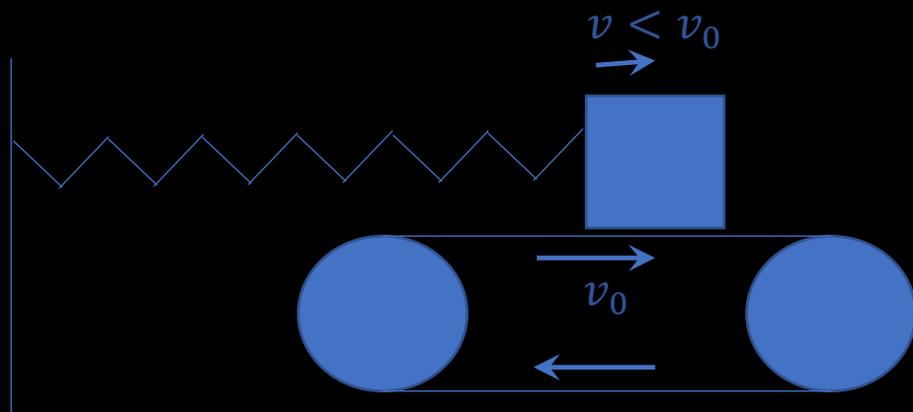
$$A = \sqrt{(\mu_e - \mu_d)^2 g^2 \left(\frac{m}{k}\right)^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}$$

velocidad de inicio de la etapa oscilatoria



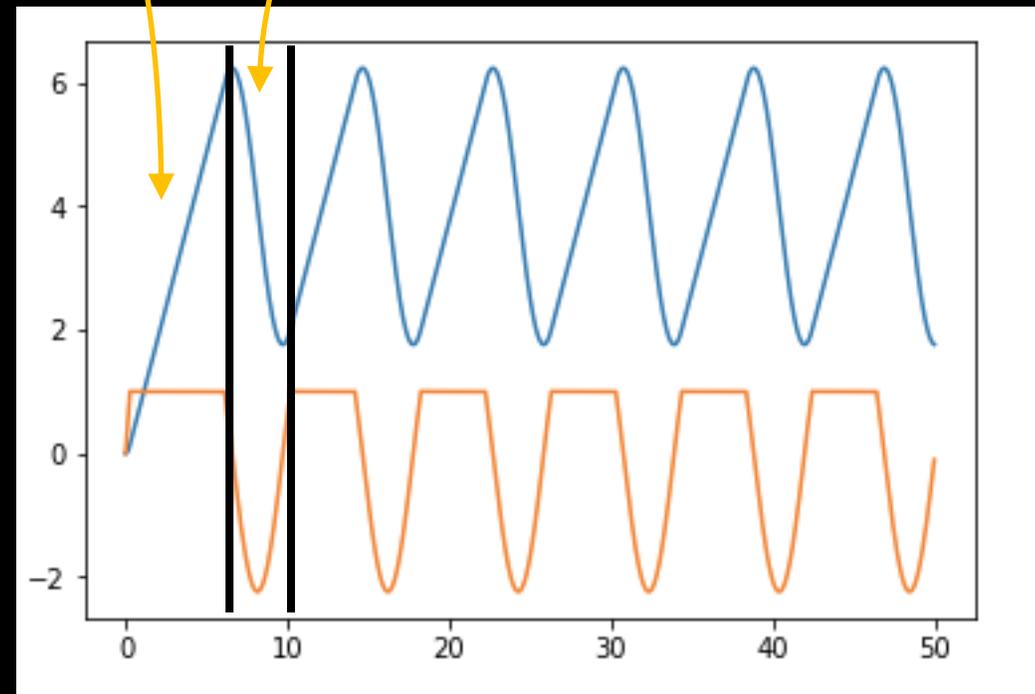
Ejercicio de la practica, escribir  
El sistema dinamico, y simular para  
Reproducir estos resultados.

tiempo



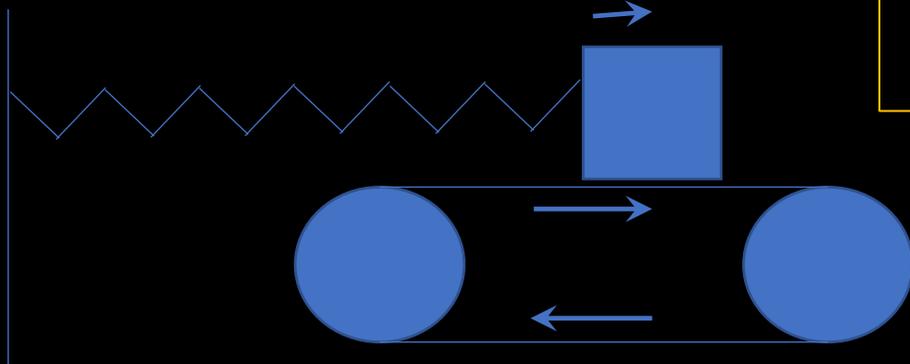
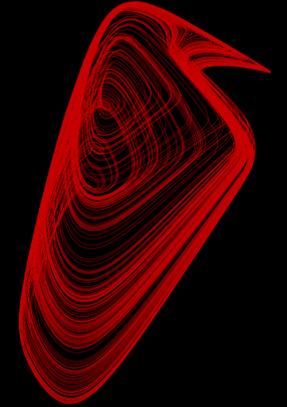
Ejercicio de la practica, escribir  
El sistema dinamico, y simular para  
Reproducir estos resultados.

arrastre      Liberacion,  
Mov. armonico



tiempo

Para entender el timbre en este problema, arrancamos por la fuente, que es esta oscilacion de una cuerda, y el factor clave que nos aleja de la cuerda ideal es este intervalo de estiramientos:



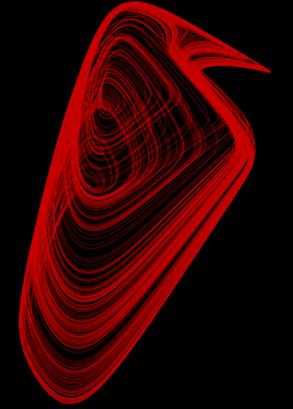
$$\Delta x = x_1 - x_{centro} = (\mu_e - \mu_d) \frac{gm}{k}$$

Uno inserta estos segmentos rectos en el medio de oscilaciones sinusoidales, y por lo tanto

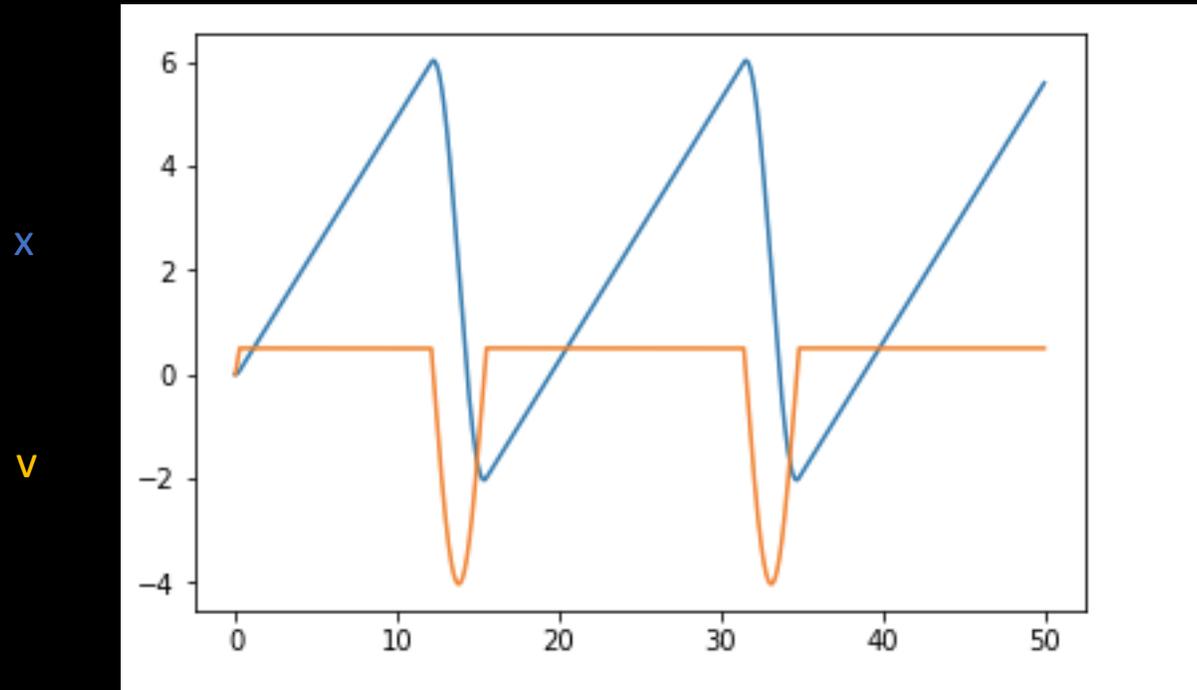
a mayor diferencia entre coeficientes de roce, mayor es el contenido espectral.



Supongamos que el periodo del movimiento armonico es mucho menor que el tiempo en el que la partícula viaja a velocidad constante



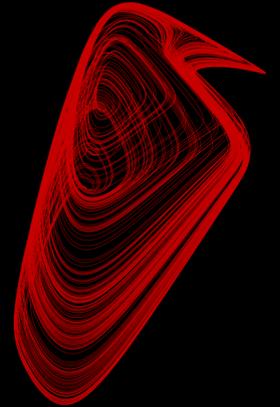
$$\tau = 2\pi \sqrt{m/k} \ll 2\Delta x/v_0 = 2(\mu_e - \mu_d) \left( \frac{gm}{kv_0} \right)$$



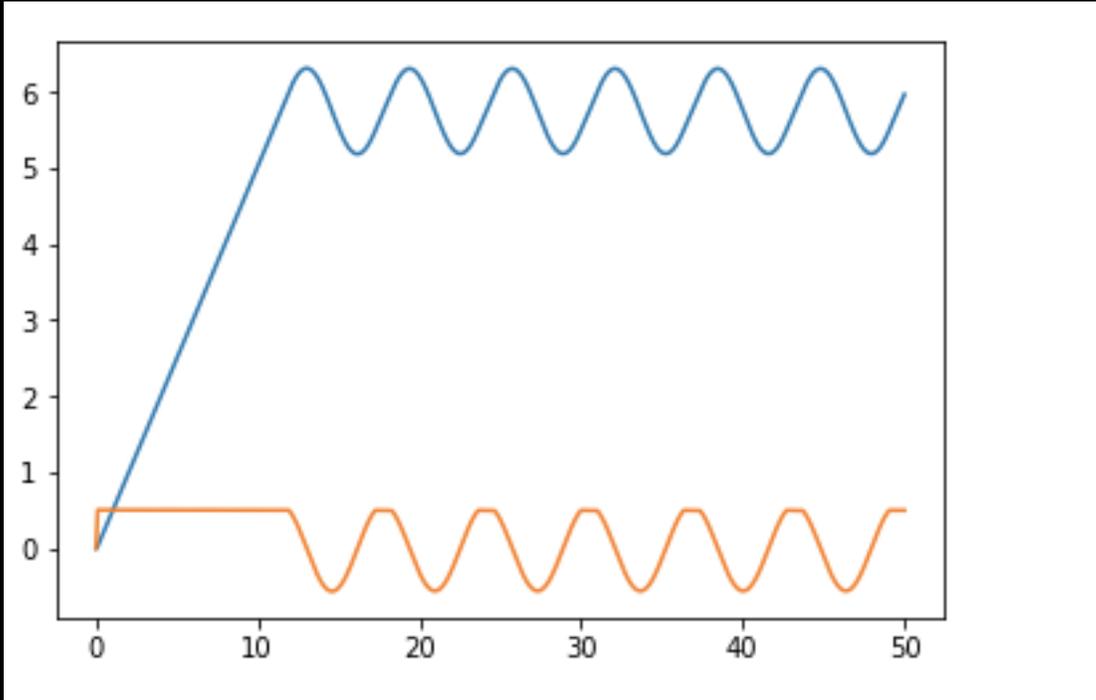


Supongamos que los coeficientes de fricción son similares...

$$2\Delta x/v_0 = 2(\mu_e - \mu_d)(g^m/kv_0) \sim \epsilon$$

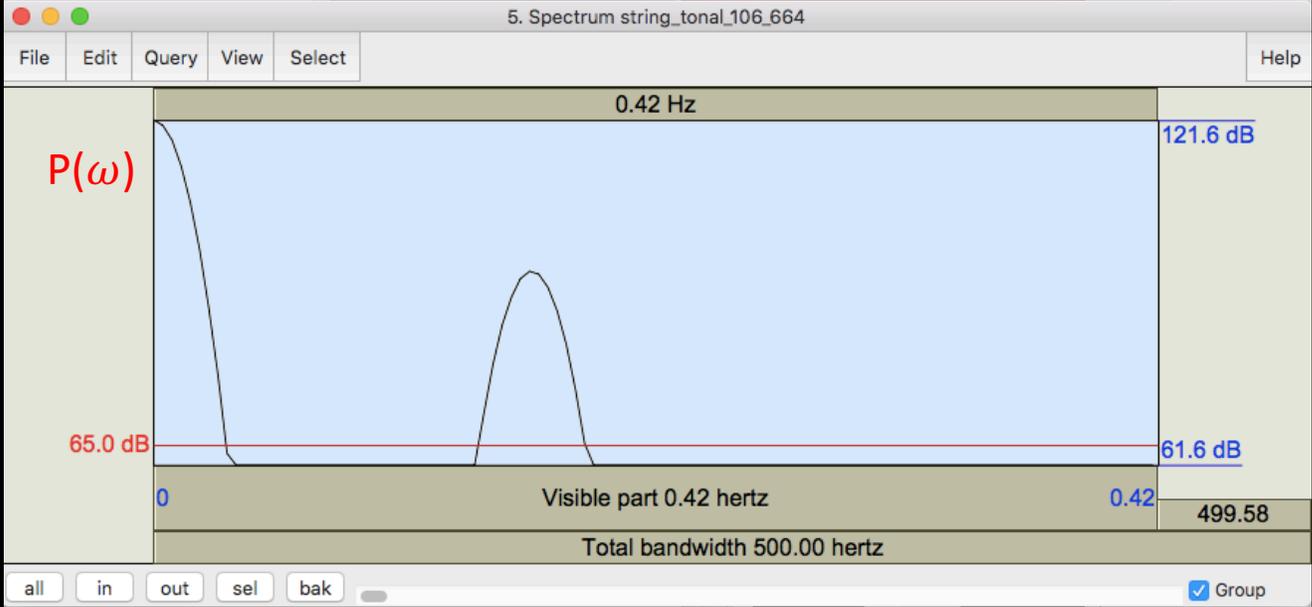
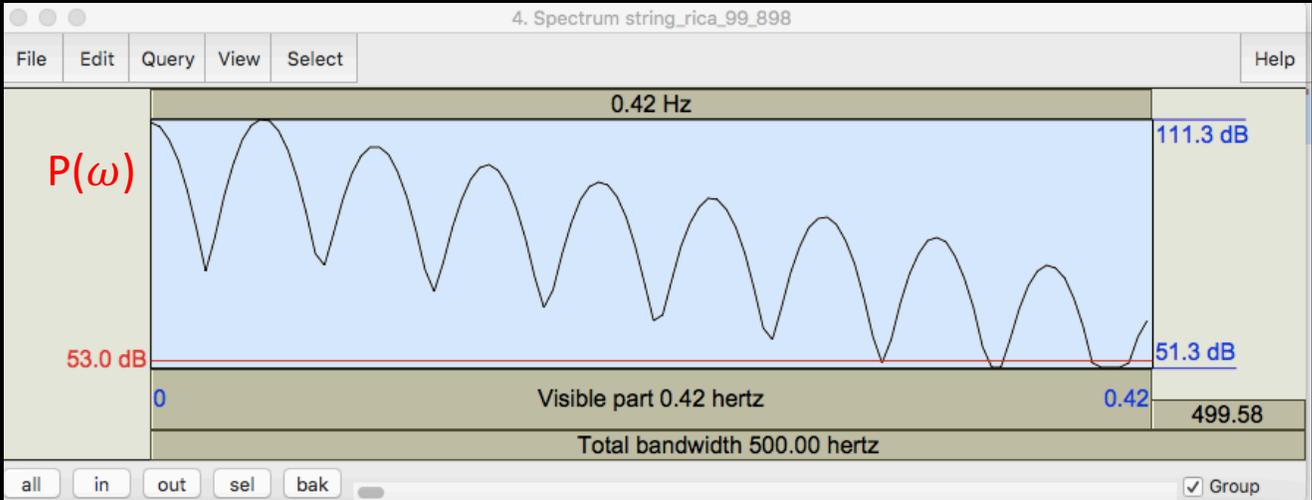
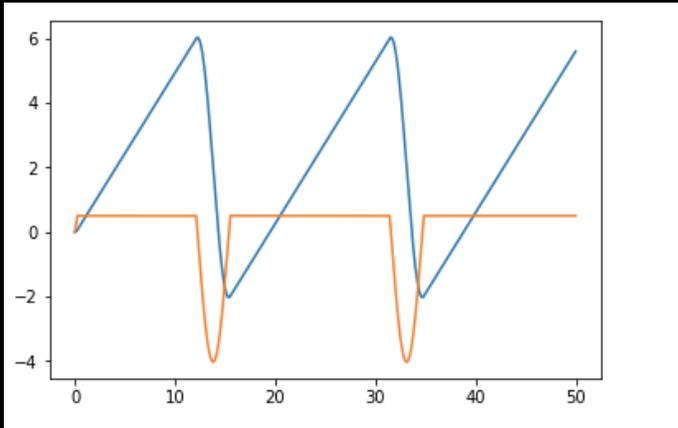


x  
v



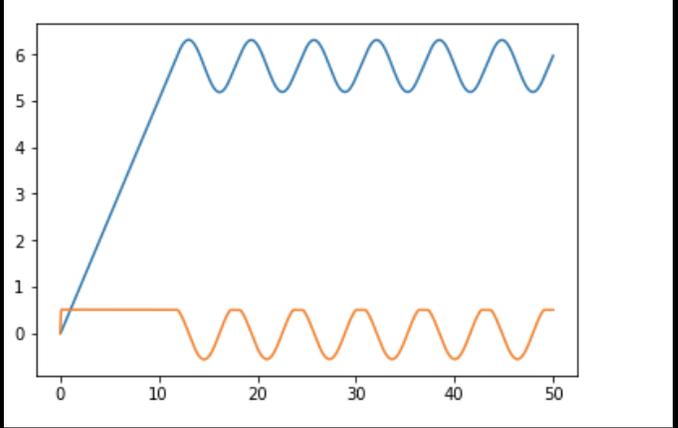
X

V



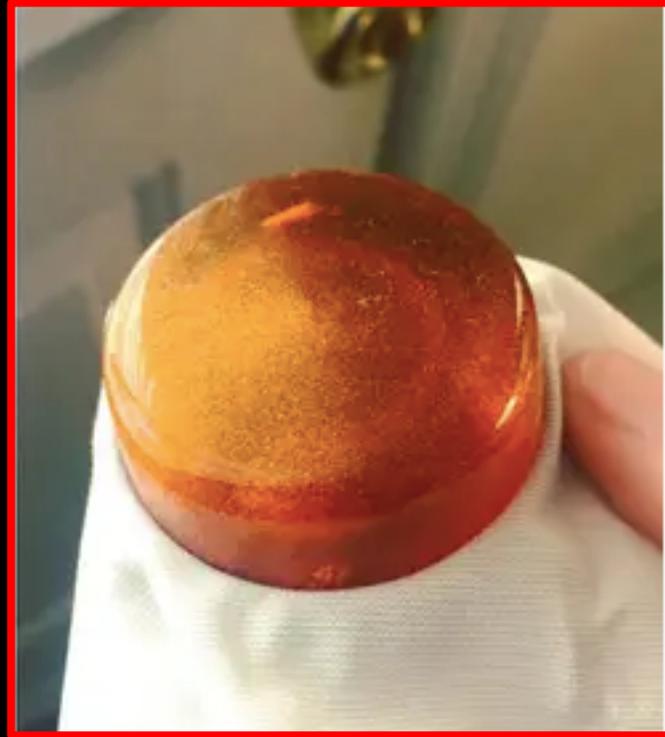
X

V



$\omega$

En toda esta historia, hay una protagonista

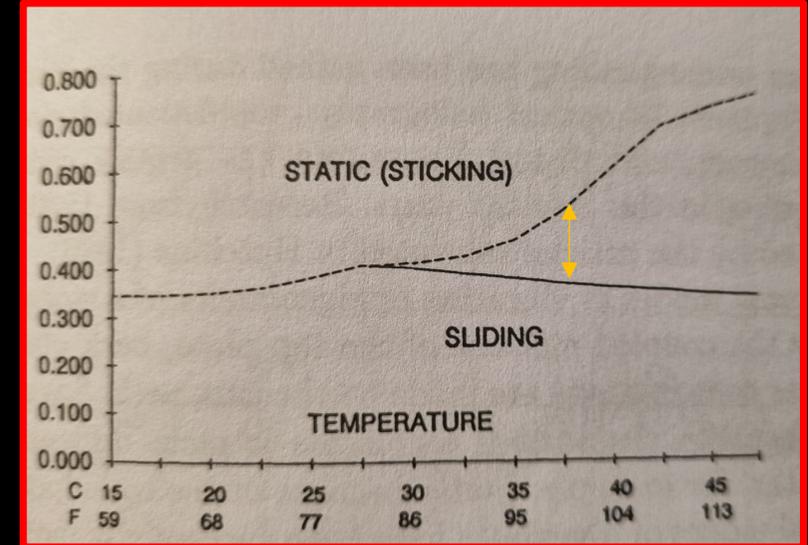


La resina es una goma natural que ni bien se entibia, se torna pegajosa, pero mas aun...

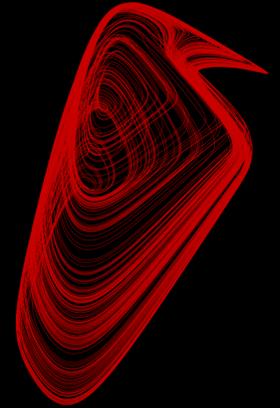
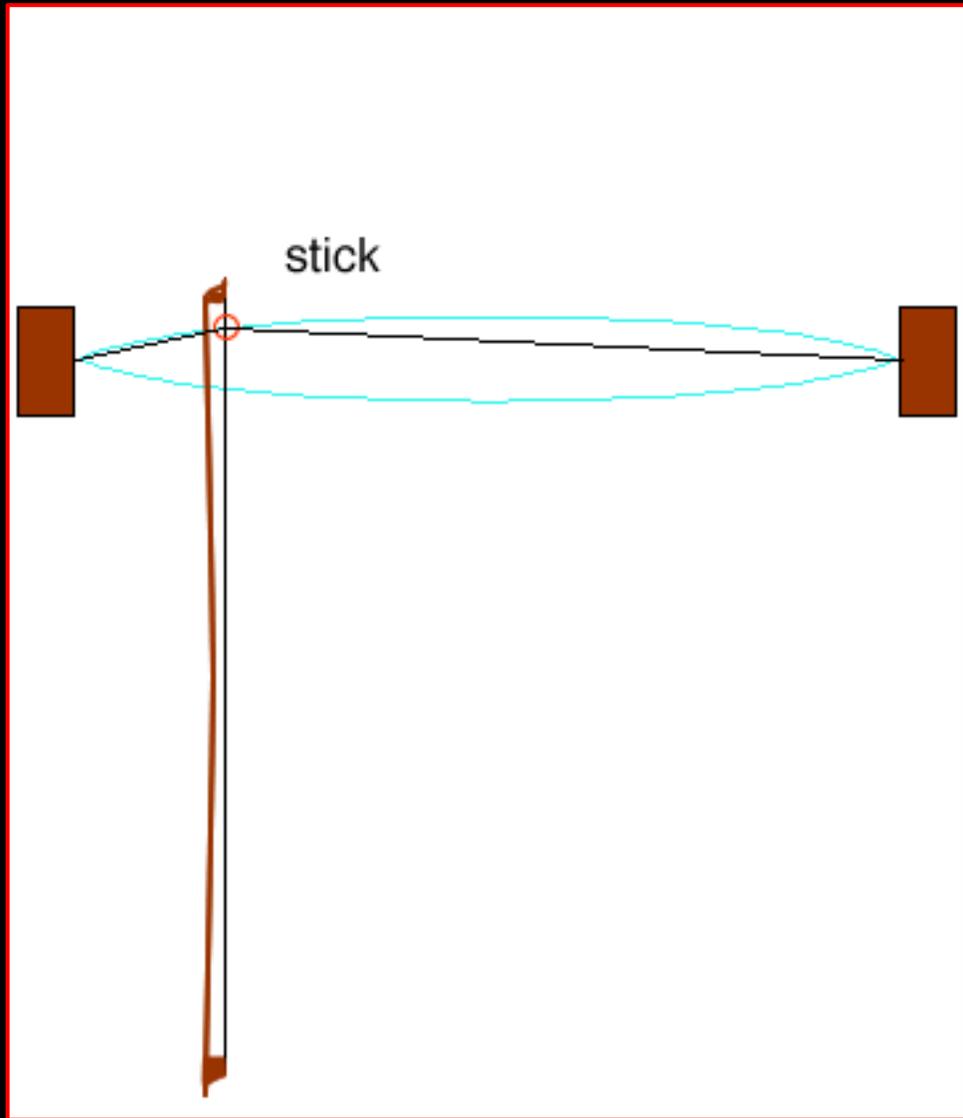
En toda esta historia, hay una protagonista



Al poco de tocar, la parte resbaladiza se hace también más resbaladiza, y la señal, más triangular

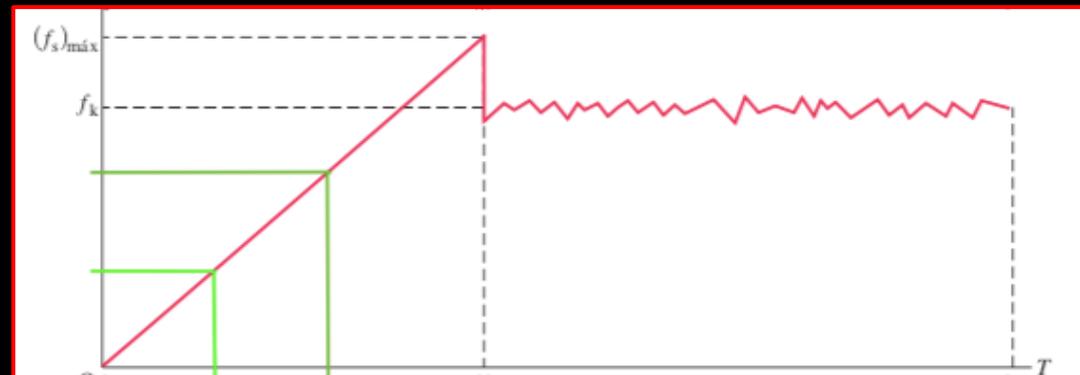


$$\tau = 2\pi \sqrt{m/k} \ll \overbrace{2\Delta x/v_0}^{2(\mu_e - \mu_d)(gm/kv_0)}$$

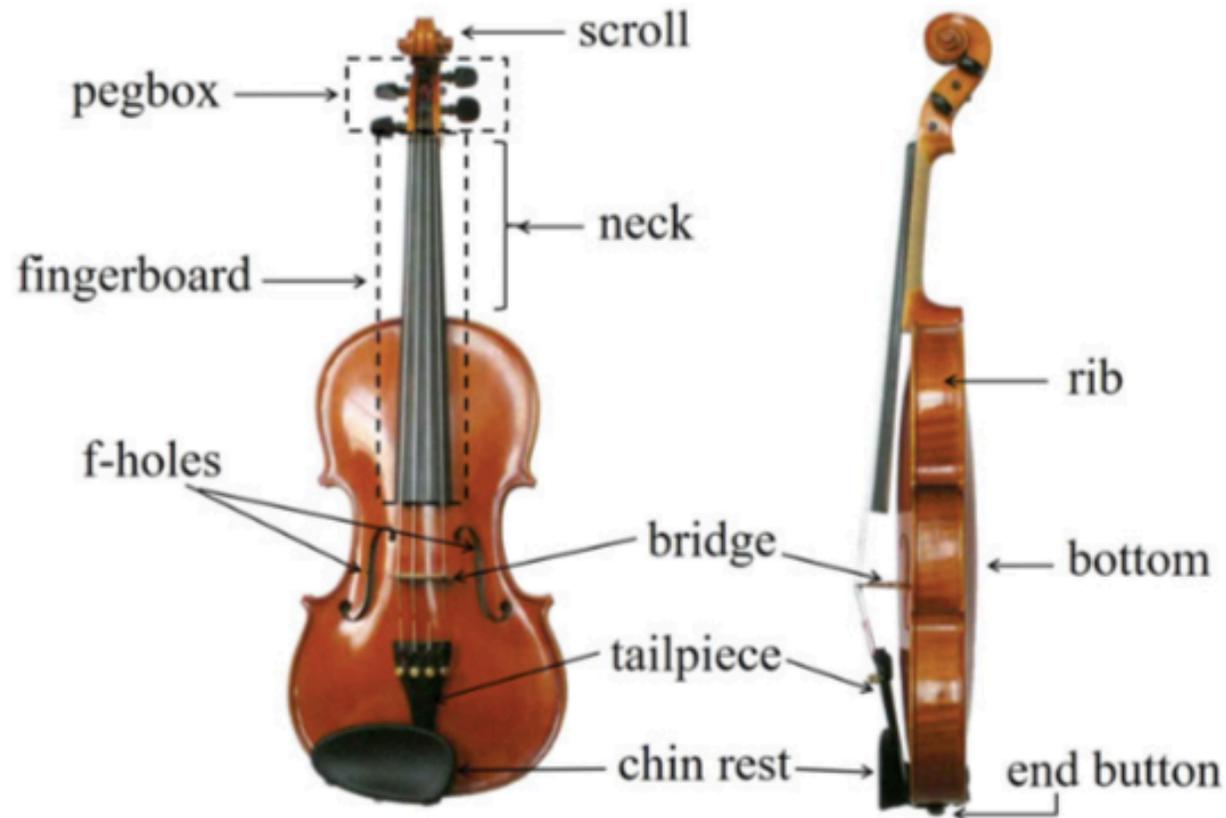


La separabilidad es una exquisitez, muy útil, para encontrar frecuencias especiales, que empleamos en el problema de la cuerda libre, que es un problema lineal.

Las ecuaciones que rigen este problema son no lineales



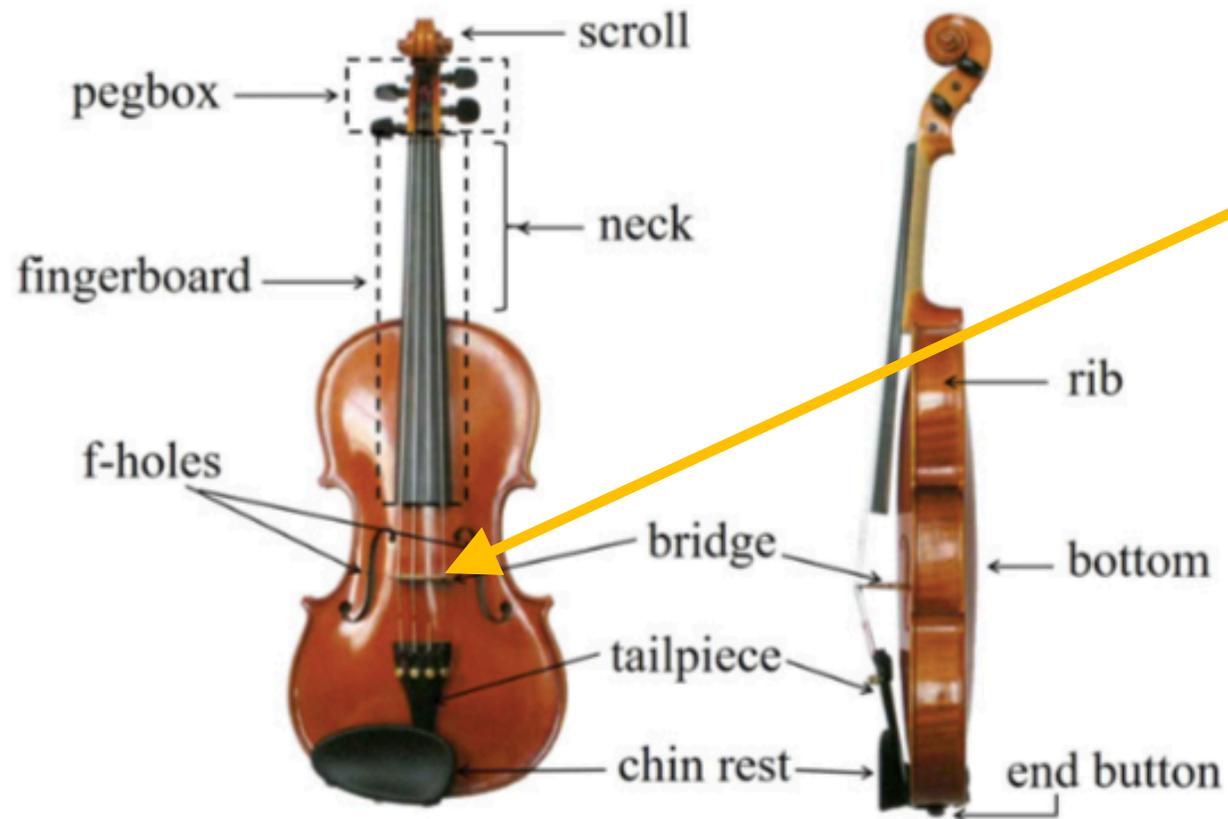
Para ser precisos, del desdazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violin.



violin  
G3-D4-A4-E5

Viola: C3-G3-D4-A4  
Cello: C2-G2-D3-A4

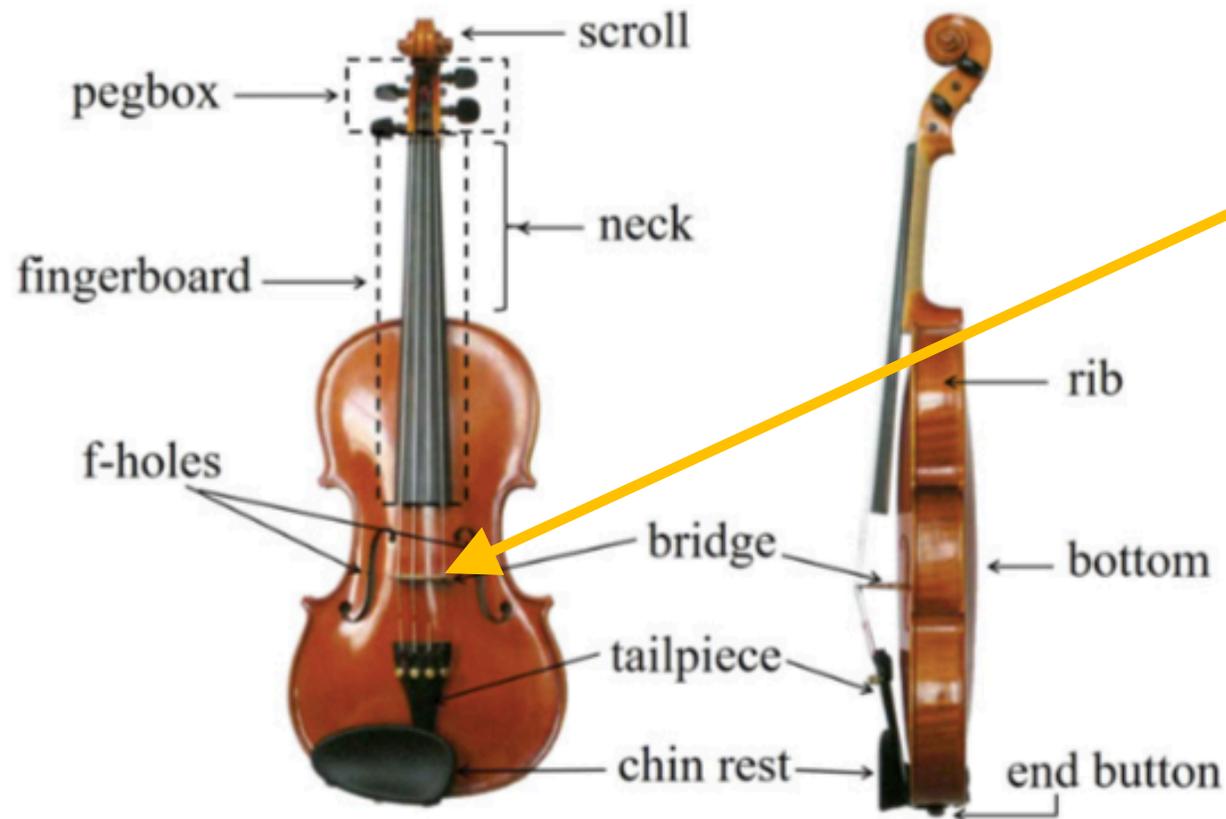
Para ser precisos, del desplazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violin.



En este punto, la fuerza (transversal, i.e. perpendicular a la direccion de la cuerda en equilibrio) que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

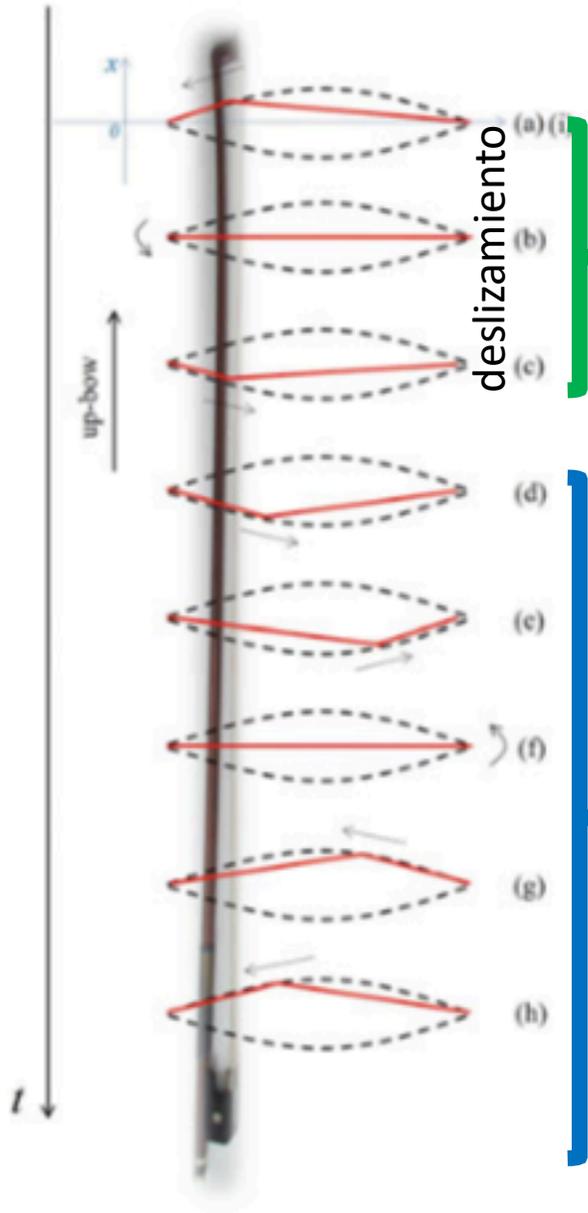
Para ser precisos, del desplazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violin.



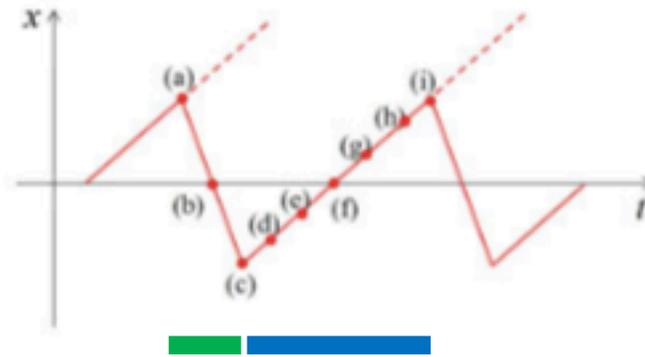
En este punto, la fuerza que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

Con el desplazamiento, y la distancia entre el arco y el puente, estimamos la derivada.

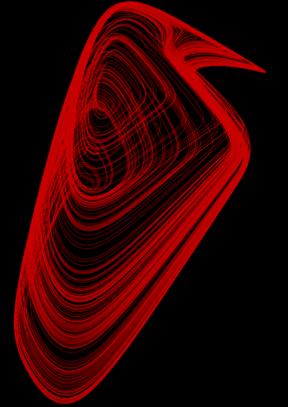


El desplazamiento

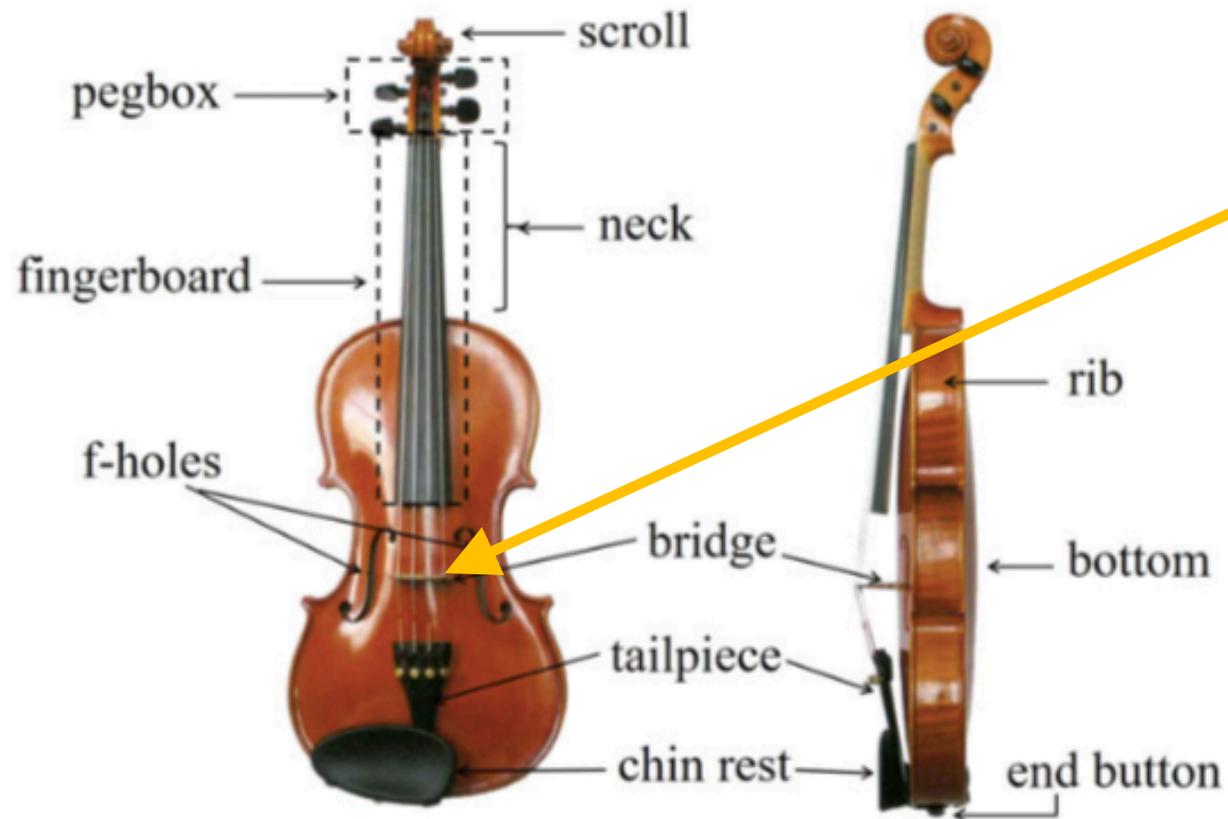


arrastre

Resolviendo el sistema  
dinamico tenemos la posicion,  
y de ahi estimamos  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$



Para ser precisos, del desplazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violín.

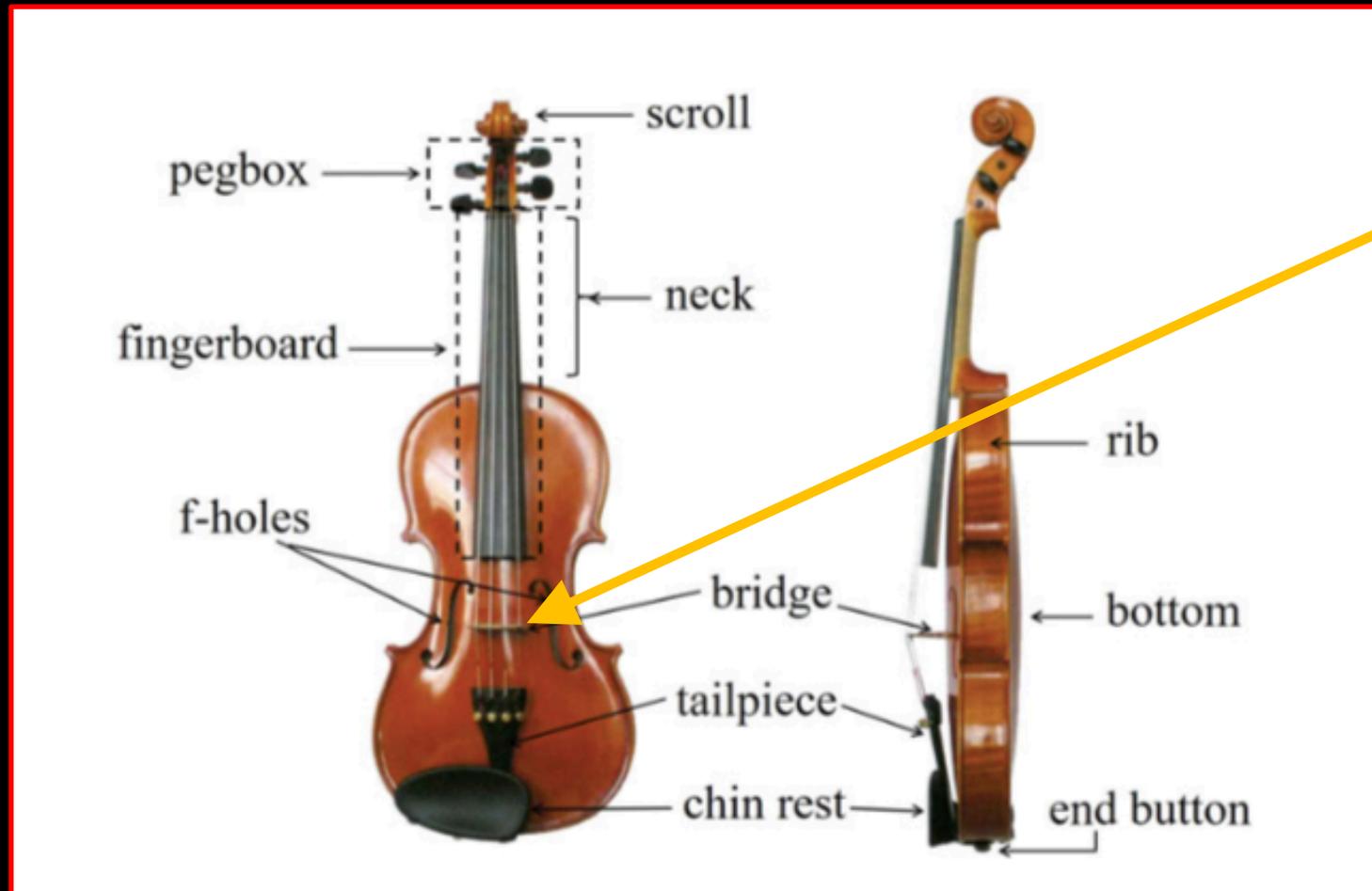


En este punto, la fuerza que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

Con el desplazamiento, y la distancia entre el arco y el Puente, estimamos la derivada.

Para ser precisos, del desplazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violín.

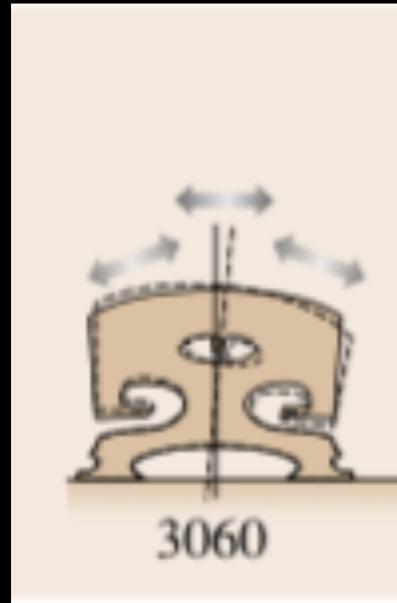


En este punto, la fuerza que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

De este modo, la fuerza que excita a la tabla vía el puente es una onda esencialmente triangular

Para ser precisos, del desplazamiento aun falta un poquito para calcular la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violin.



En este punto, la fuerza que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

El puente, afectado por la fuerza que ejerce sobre el la cuerda, es la responsable de forzar a la tabla sobre la que esta apoyada.

La riqueza espectral que encontramos en la fuente misma del sonido en el caso de las cuerdas con arco, se originan en la no linealidad del problema (la cuerda libre es un problema lineal, la cuerda acoplada a un arco con resina no lo es).

Vamos a tener este ejemplo presente, cuando vayamos visitando otras fuentes sonoras.

Ahora bien: ¿Como leer de un espectro las propiedades de una señal?  
¿Como se refleja, por ejemplo, esta asimetría que presenta el desplazamiento transversal de la cuerda?

## Repasemos Fourier

Sea una función periódica

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

Desarrollo de Fourier

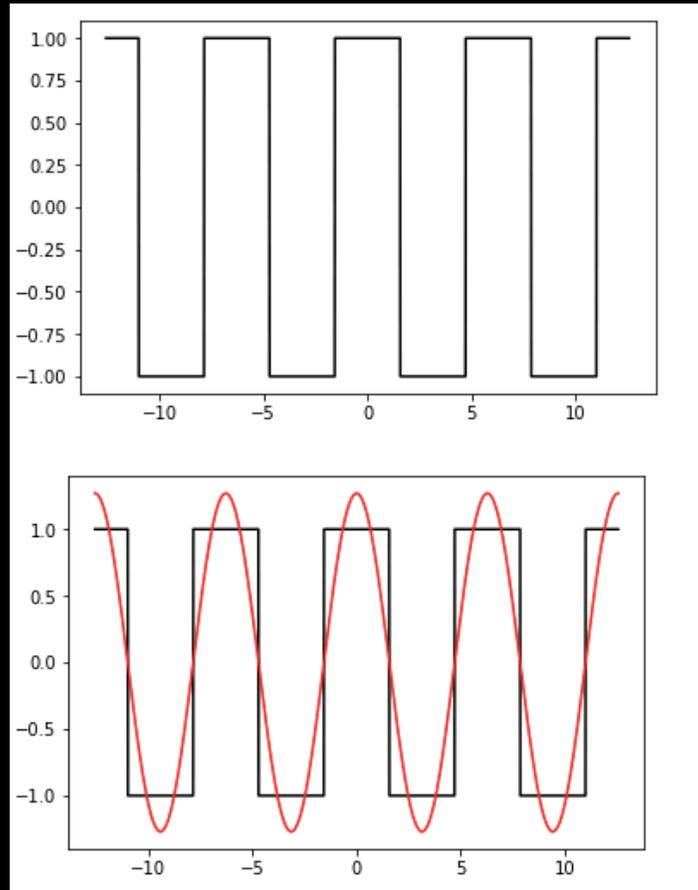
$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

$$B_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{z_1}^{z_1+\lambda} f(z) dz$$

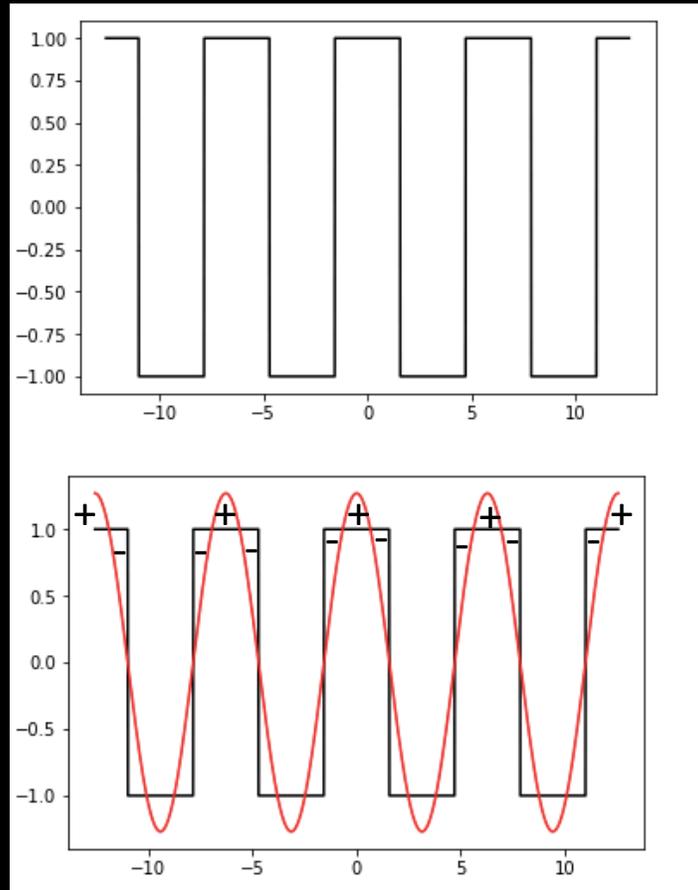
$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_{z_1}^{z_1+\lambda} f(z) \sin\left(\frac{2m\pi}{\lambda} z\right) dz$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_{z_1}^{z_1+\lambda} f(z) \cos\left(\frac{2m\pi}{\lambda} z\right) dz$$

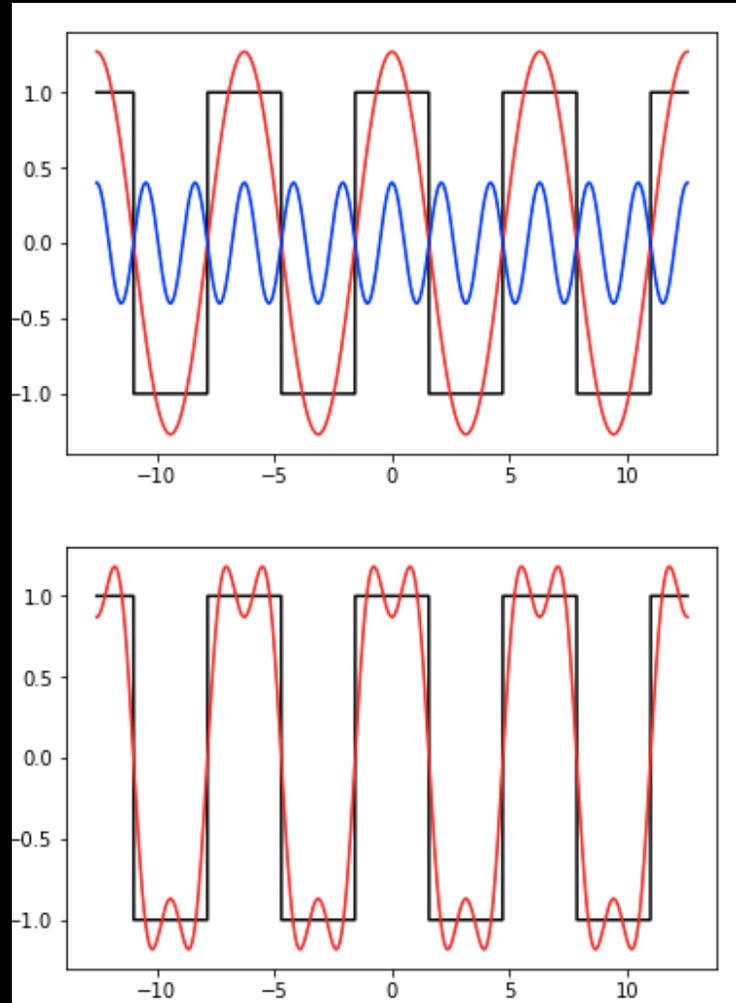
Como interpretamos este desarrollo?



## Como interpretamos este desarrollo?



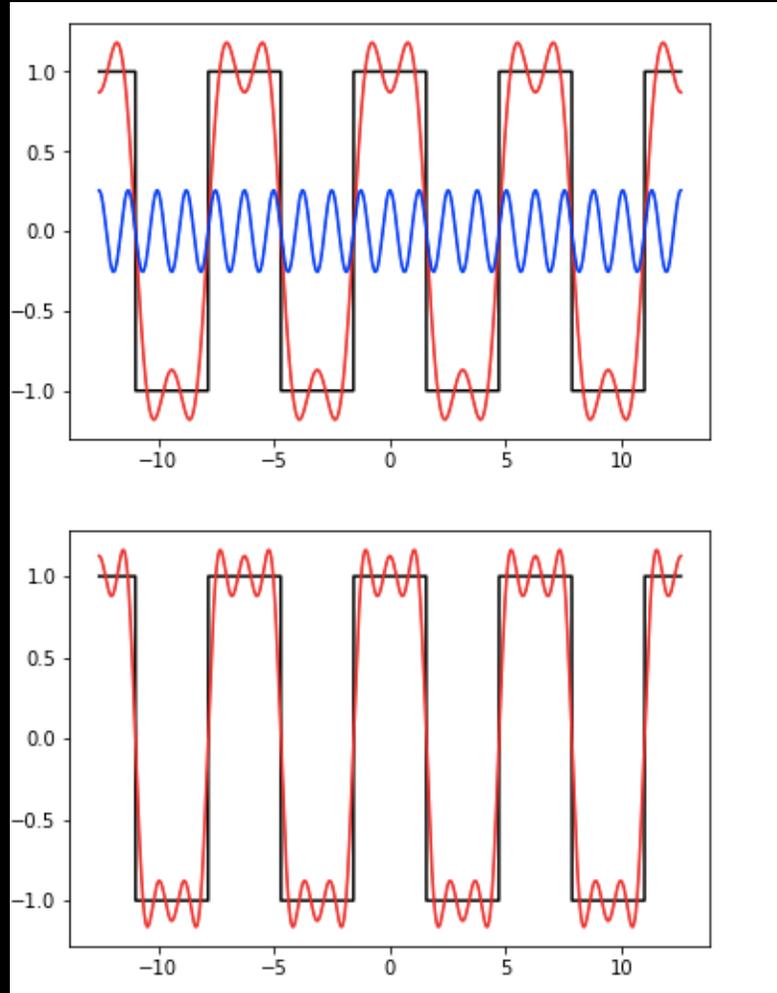
## Como interpretamos este desarrollo?



Si restamos esta funcion azul, a la roja...

Tenemos esta funcion, que constituye una mejor aproximacion

Y una corrección de mayor frecuencia, corrige las nuevas diferencias...



## Repasemos Fourier

Sea una función periódica

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

Veamos como llegamos  
a las expresiones que  
presentamos antes para  
estos coeficientes



$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_{z_1}^{z_1+\lambda} f(z) \sin\left(\frac{2m\pi}{\lambda} z\right) dz$$



## Repasemos Fourier

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right)$$

## Repasemos Fourier

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\sin\left(n \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(m \frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \frac{1}{2} \cos\left((n - m) \frac{2\pi}{\lambda} z\right) - \frac{1}{2} \cos\left((n + m) \frac{2\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\cos\left(n \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(m \frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \frac{1}{2} \sin\left((m + n) \frac{2\pi}{\lambda} z\right) - \frac{1}{2} \cos\left((m - n) \frac{2\pi}{\lambda} z\right)$$

## Repasemos Fourier

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right)$$

Y se integra a ambos lados

$$\int_z^{z+\lambda} \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) dz = A_{n'} \frac{\lambda}{2}$$

## Repasemos Fourier

$$f = f(z) = f(z + \lambda)$$

(donde  $\lambda$  puede hacer referencia a  $L$  o a  $T$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right)$$

$$\sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) + B_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right)$$

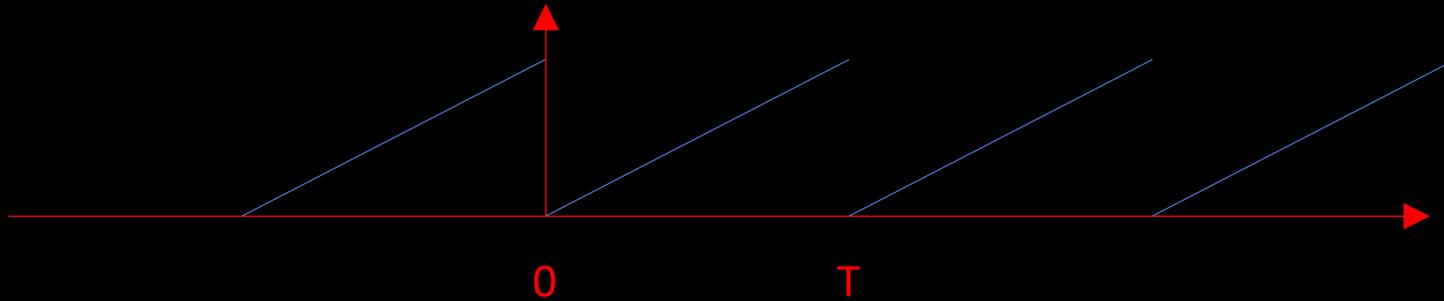
Y se integra a ambos lados

$$\int_z^{z+\lambda} \sin\left(\frac{2n'\pi}{\lambda} z\right) f(z) dz = A_n \left(\frac{\lambda}{2}\right) \int_z^{z+\lambda} \left(\frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} \cos\left(2n' \frac{2\pi}{\lambda} z\right)\right) dz$$





Como seria pues el espectro de una onda triangular?



$$B_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} dt = 1$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = -\frac{1}{n\pi}$$

aparecen todos los armónicos,  
con amplitud decreciente











## Una sutileza a la hora de hablar de los modos de una cuerda

Supongamos que un extremo esta libre, y el otro, sujeto a un medio elastico

$$T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = K_0 y(0, t)$$

$$y(L, t) = 0$$

Los modos propios se calculan planteando

$$y(x, t) = \phi(x) \cos(\omega t)$$

Una sutileza a la hora de hablar de los modos de una cuerda

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi = 0$$

$$y(L, t) = 0 \rightarrow \phi(L) = 0$$

$$\phi_n = \sin(k_n(x - L))$$

$$T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = K_0 y(0, t)$$

$$T k_n \cos(k_n L) = -K_0 \sin(k_n L)$$

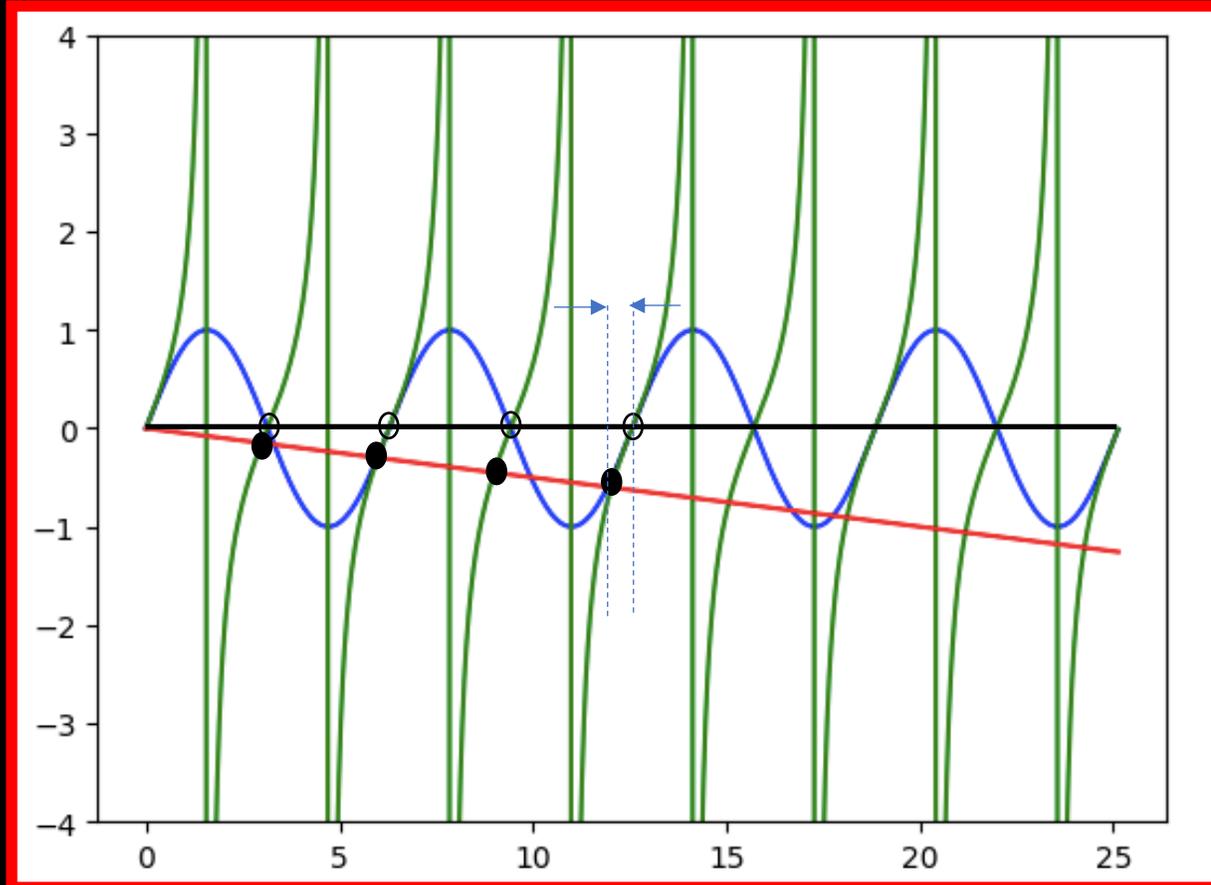
En  $x = 0$ ,  
acople restitutivo

$$\tan(k_n L) = -(k_n T) / K_0$$

$$\tan(k_n L) = -(k_n T) / K_0$$

Ante un acople restitutivo,  
el espectro se comprime.

Vamos a analizar luego ante  
acoples inertivos, y cuando  
acoplamos a un sistema con  
resonancias.



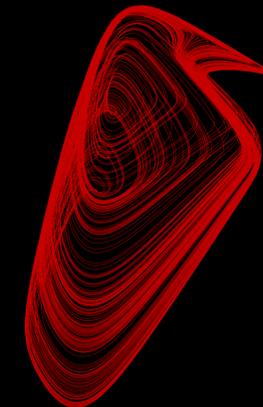
Vamos sumando complejidad al fenomeno.

1. La parcelacion espectral, debido a la inevitable riqueza espectral de una fuente
2. Las condiciones realistas de contorno, hacen que los armonicos de una cuerda no sean esperables a multiples de la fundamental. De que correccion estamos hablando?

Si percibimos una diferencia de frecuencias del orden de 16 centimos, en nuestra guitarra ...  
¿hasta que armonico podemos asumir que la aproximacion de condiciones de contorno  
Ideal, de desplazamiento cero, funciona bien?

Podemos empezar a ver el tema de los filtros

Podemos como afecta el modo de excitar a una cuerda  
al sonido generado por la misma.

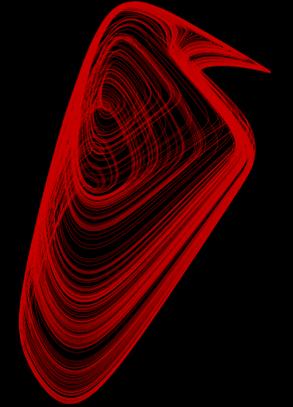
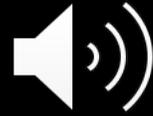


## Die 12 Cellisten Der Berliner Philharmoniker - Pavane

YouTube · Dilhun Sesler · Jan 2, 2021

Gabriel Faure

Este fragmento ilustra con mucha claridad la diferencia de un mismo dispositivo, en función de como se excita la fuente. Comparar el sonido de las cuerdas frotadas y pulsadas.



## Die 12 Cellisten Der Berliner Philharmoniker - Pavane

YouTube · Dilhun Sesler · Jan 2, 2021

Gabriel Faure

Y ya que estamos, pensemos en el drama que fue históricamente escuchar lo que toca alguien que pulsa una cuerda...

Este fragmento ilustra con mucha claridad la diferencia de un mismo dispositivo, en función de como se excita la fuente. Comparar el sonido de las cuerdas frotadas y pulsadas.