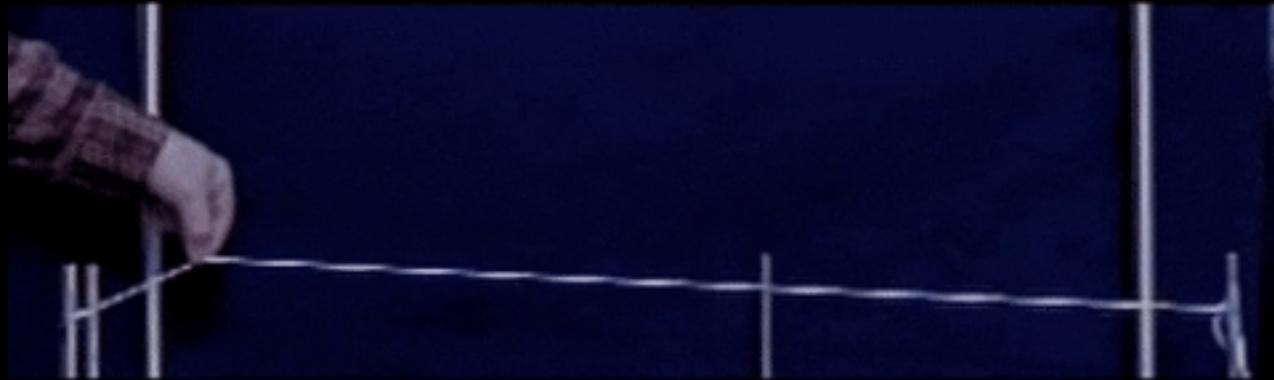


Cuerdas pulsadas y golpeadas



La estrategia con la cuerda tocada con arco fue

1. Estudiar la dinámica del campo de deformaciones de la cuerda en el punto de contacto con el arco $\xi(x = a, t)$,
2. Emplear $\xi(x = a, t)/a$ como proxy de $\partial\xi/\partial x|_x$, para calcular la fuerza que afectara a la madera de la caja.

La estrategia con la cuerda tocada con arco fue

1. Estudiar la dinámica del campo de deformaciones de la cuerda en el punto de contacto con el arco $\xi(x = a, t)$,
2. Emplear $\xi(x = a, t)/a$ como proxy de $\partial\xi/\partial x|_x$, para calcular la fuerza que afectara a la madera de la caja.

Pero en la cuerda pulsada, o la golpeada, las oscilaciones luego de establecida la condicion inicial, no estan restringidas; **evolucionan libremente**. De modo que debemos seguir otra estrategia para revelar la dinamica de la cuerda

Cuerdas pulsadas: así se ven

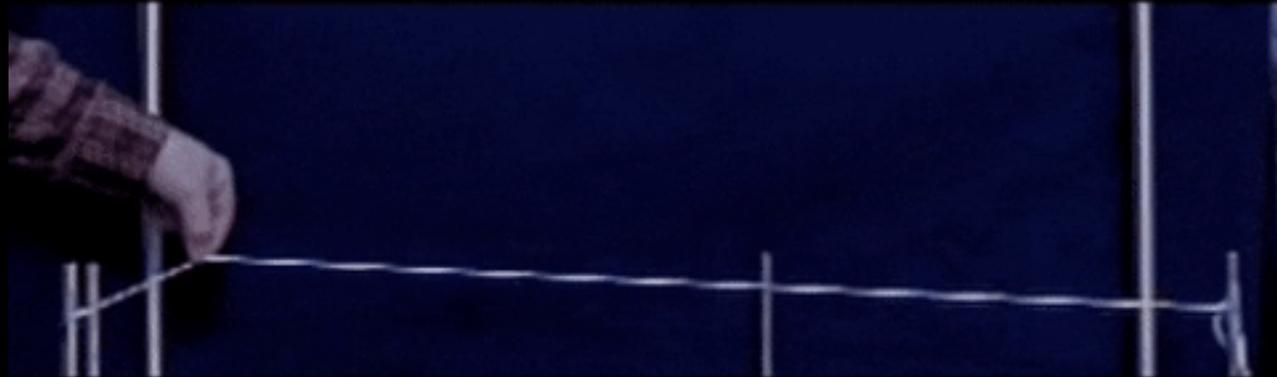


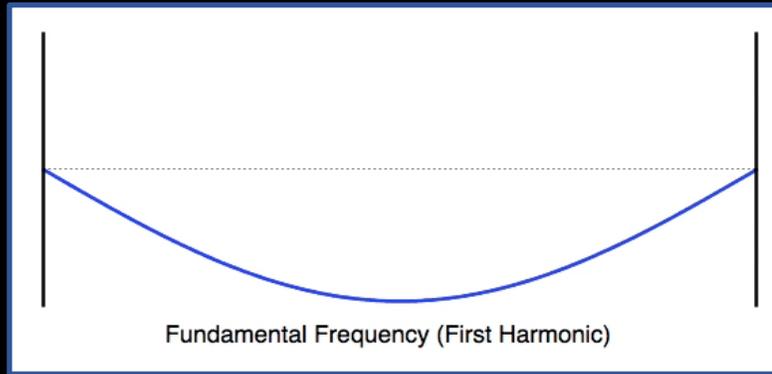
Observación: la cuerda frotada con arco, desde la fase de resbale, hasta que el arco re-agarra a la cuerda, se ve como esta cuerda... porque esencialmente es lo mismo

Cuerdas pulsadas

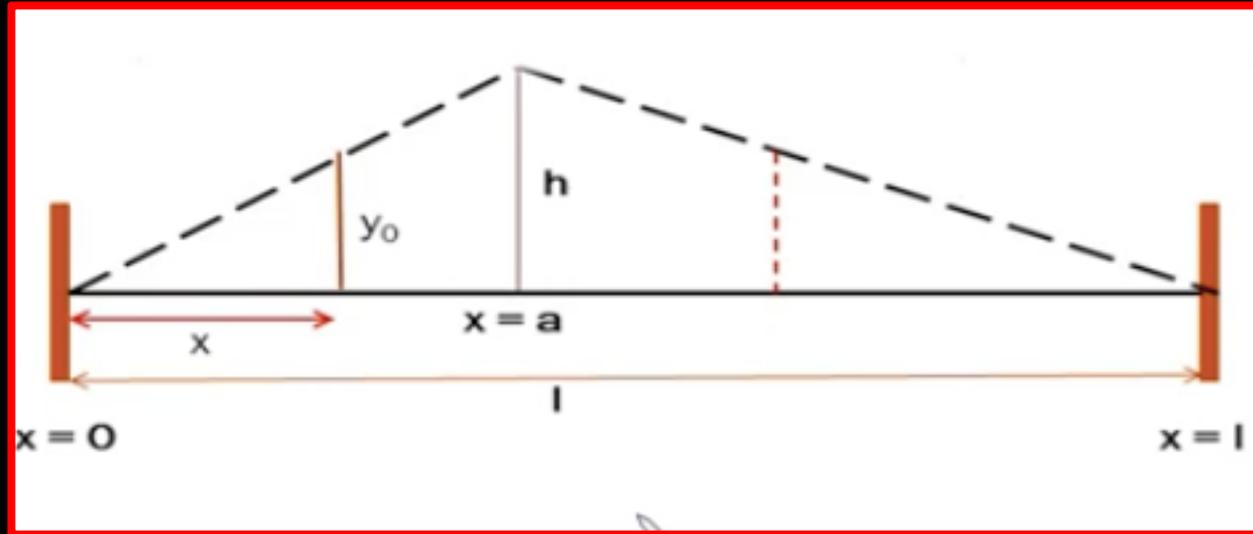
1. Fourier

2. Helmholtz



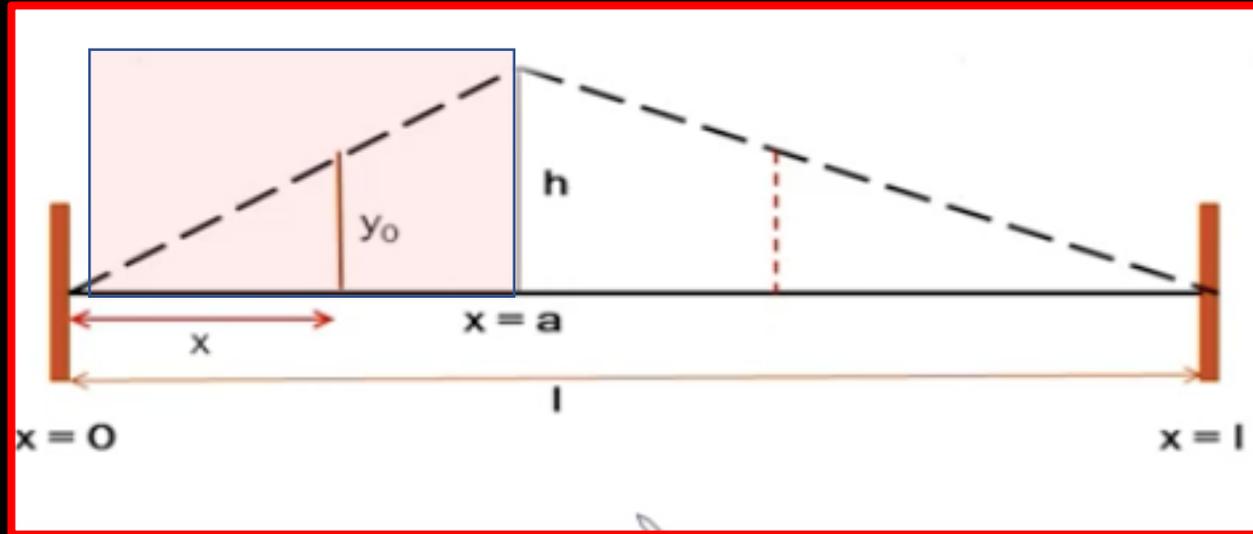


Condición inicial del problema de la cuerda pulsada



$$y_0(x) = ?$$

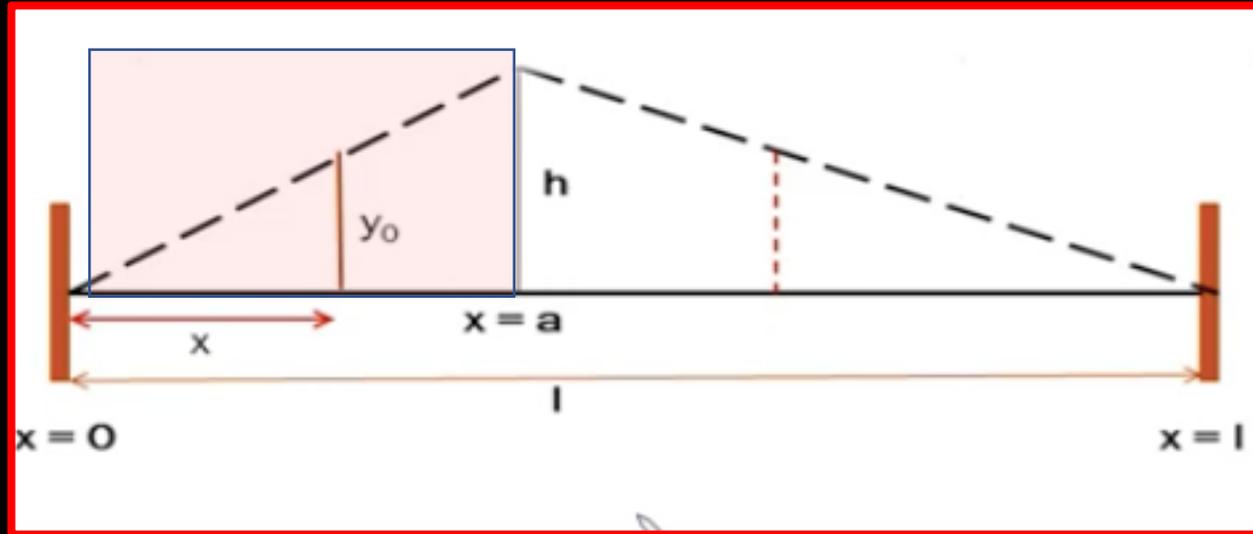
Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada



$$\frac{y_0(x)}{x} = \frac{h}{a}$$

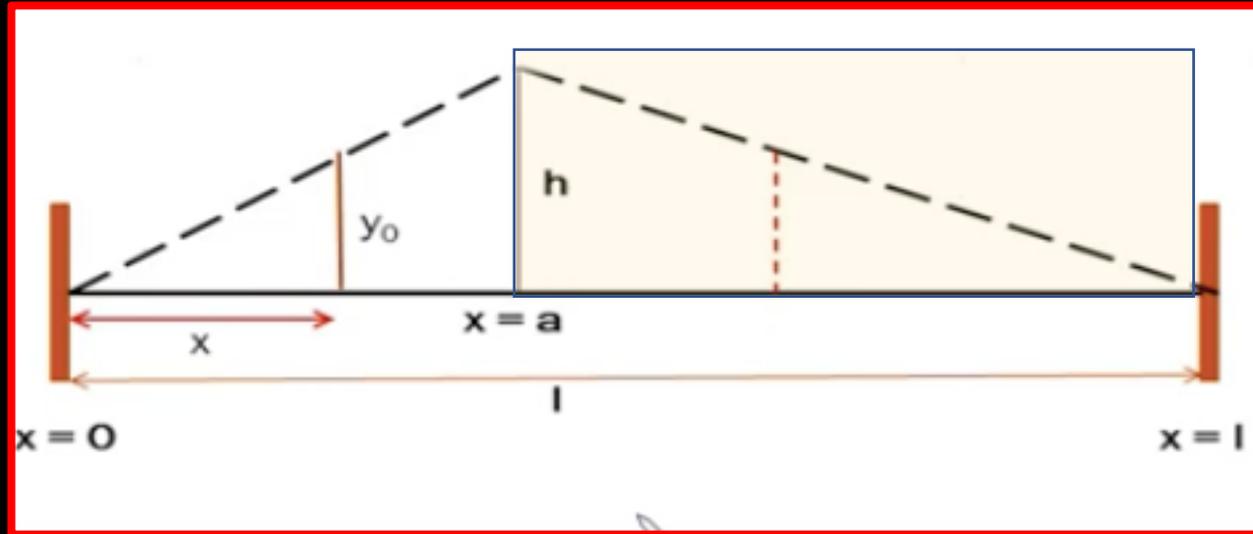
si $x < a$

Condición inicial del problema de la cuerda pulsada



$$\frac{y_0}{x} = \frac{h}{a} \rightarrow y_0(x) = \frac{hx}{a} \quad \text{si } x < a$$

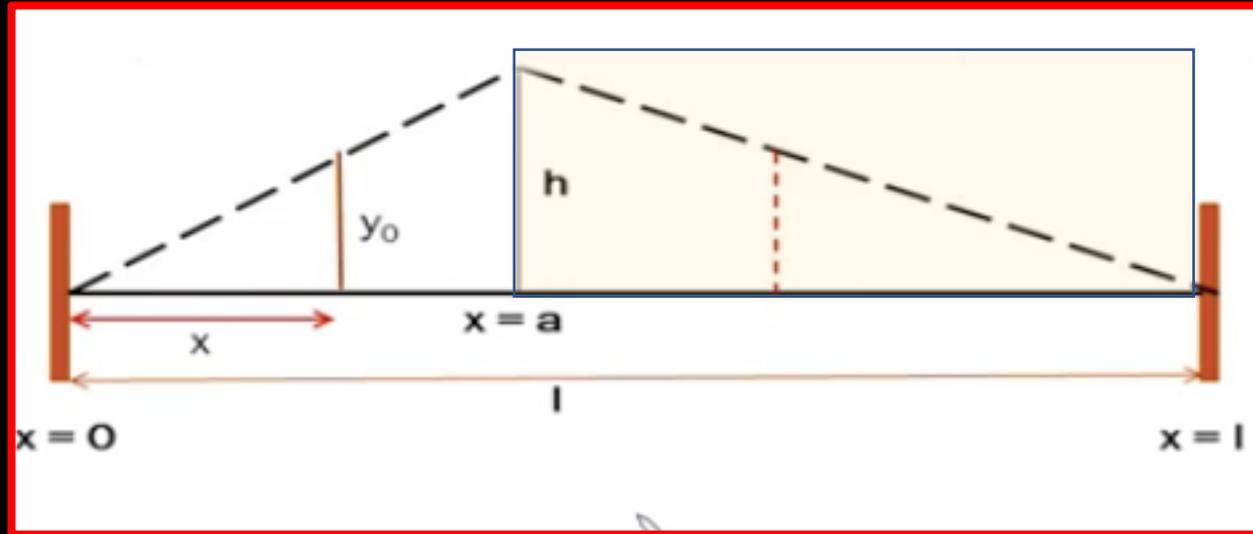
Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada



$$\frac{y_0}{x} = \frac{h}{a} \rightarrow y_0(x) = \frac{hx}{a} \quad \text{si } x < a$$

$$\frac{y_0}{l-x} = \frac{h}{l-a} \quad \text{si } x > a$$

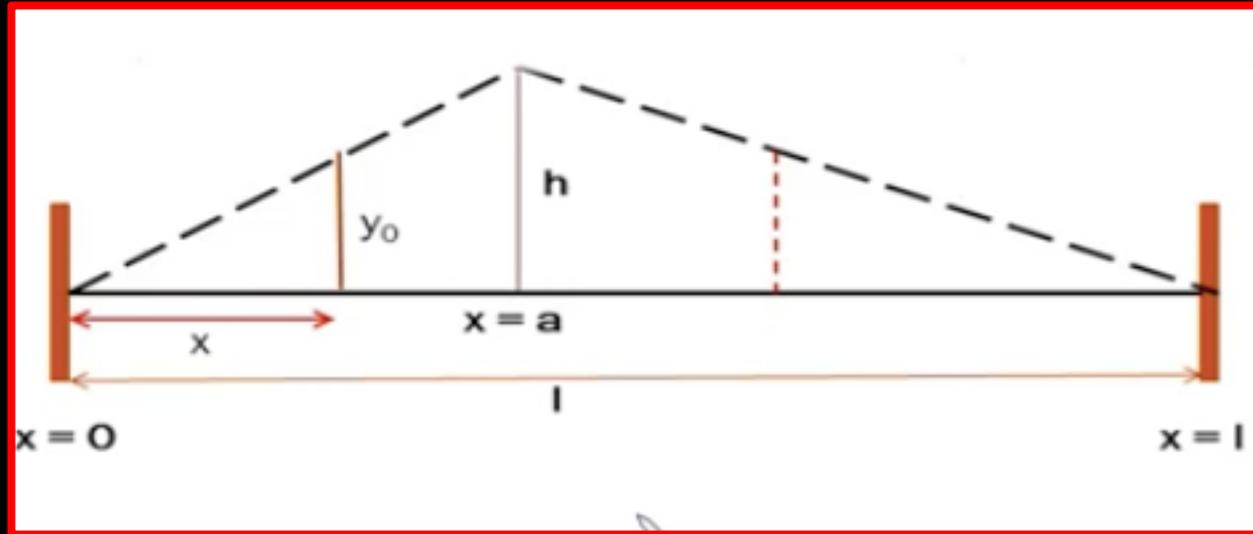
Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada



$$\frac{y_0}{x} = \frac{h}{a} \rightarrow y_0(x) = \frac{hx}{a} \quad \text{si } x < a$$

$$\frac{y_0}{l-x} = \frac{h}{l-a} \rightarrow y_0(x) = \frac{h(l-x)}{l-a} \quad \text{si } x > a$$

Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada



$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = \frac{hx}{a} \quad \text{si } x < a \\ y_0 = \frac{h(l-x)}{l-a} \quad \text{si } x > a \end{array} \right.$$

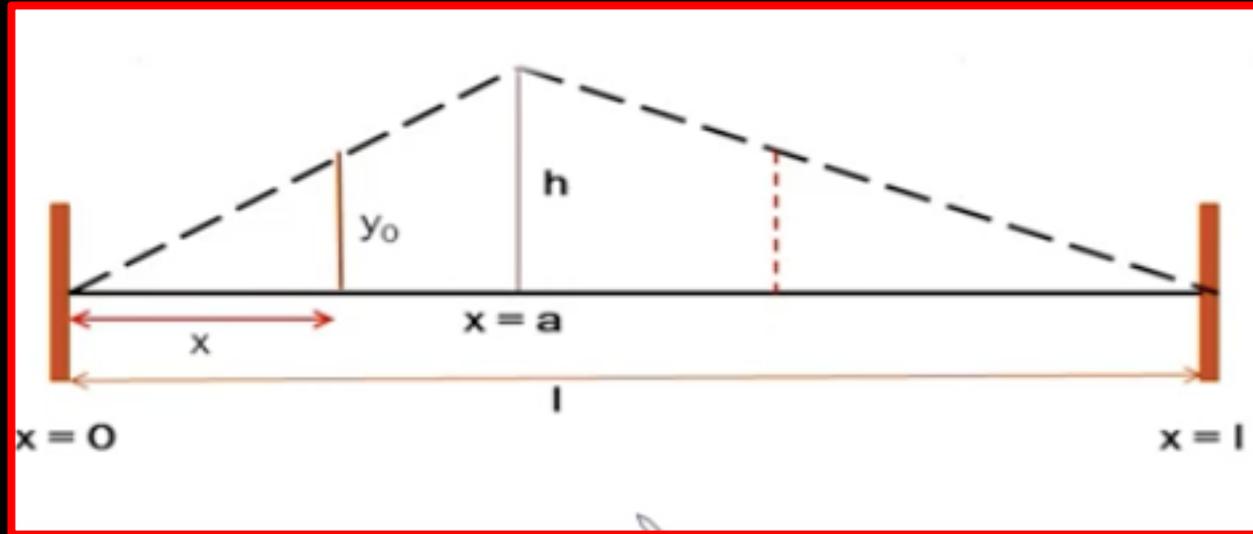
$$\frac{dy_0}{dt} = 0 \quad \text{para todo } x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y = \sum_1^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$$

Garantiza que en el origen, $y=0$

Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada

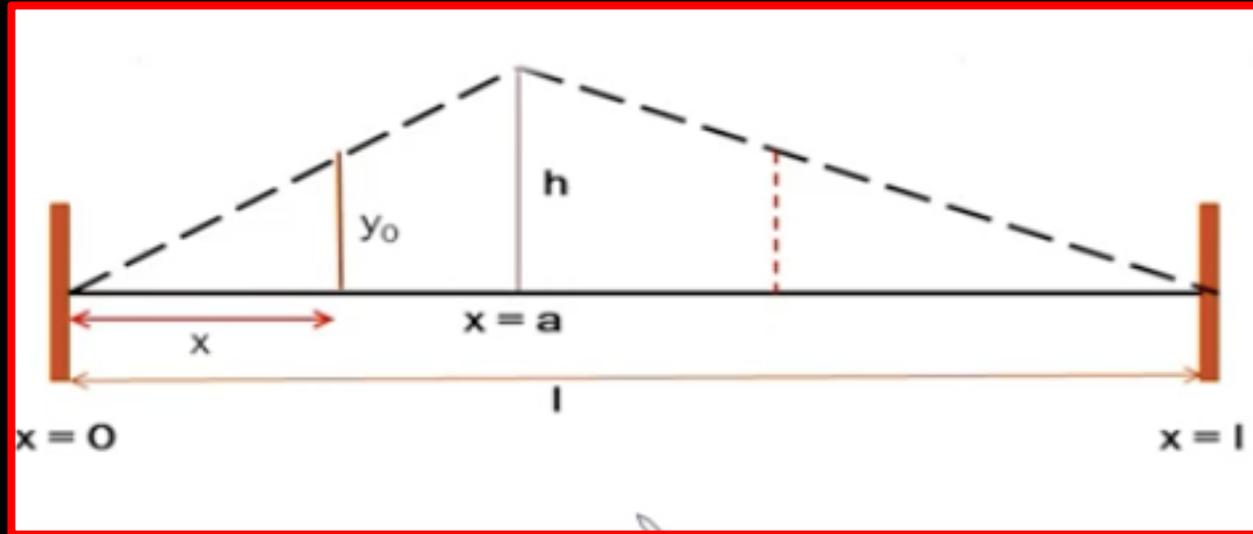


$$y = \sum_1^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$

Garantiza que en $x=l$, $y=0$

Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada

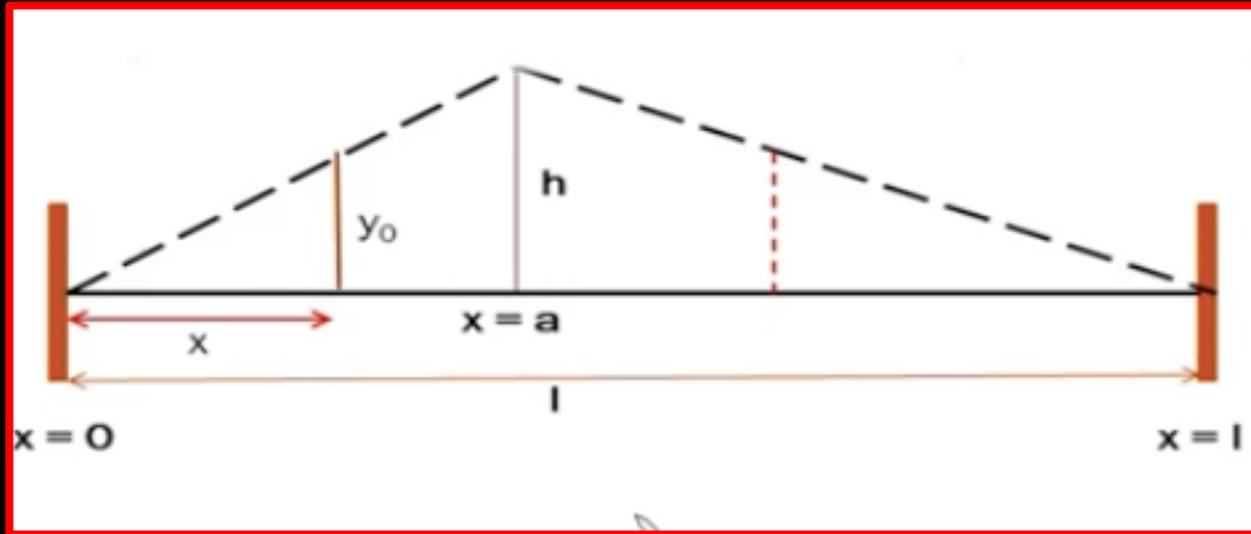


$$y = \sum_1^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad w_n = \frac{n\pi}{l} c \quad c = \sqrt{T/m}$$

La discretizacion de k, lleva a la de w

Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada

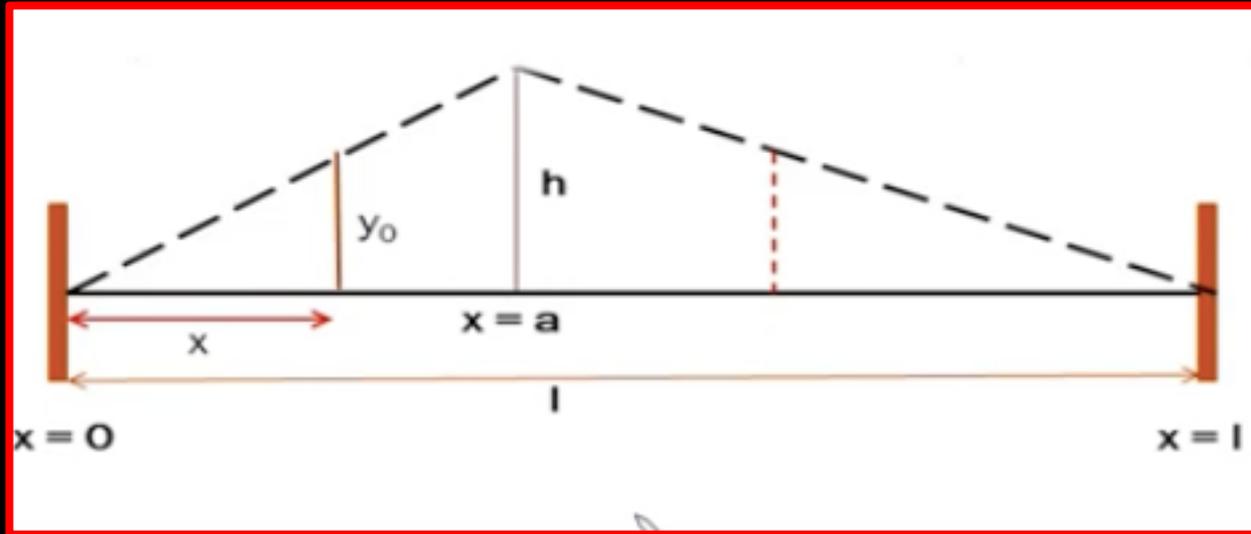


$$y = \sum_1^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad w_n = \frac{n\pi}{l} c \quad c = \sqrt{T/m}$$

La discretizacion de k , lleva a la de w

Condicion inicial del problema de la cuerda pulsada



$$y = \sum_1^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad w_n = \frac{n\pi}{l} c \quad c = \sqrt{T/m}$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) \equiv \dot{y}_0(x, 0) = 0$$

$$\dot{y}_0(x, 0) = \sum_1^{\infty} w_n \sin(k_n x) (b_n) = 0$$

$$b_n = 0$$

$$y(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(w_n t)$$

Para calcular el coeficiente, multiplicamos
Por $\sin(k_s x)$, e integramos.

$$y(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(w_n t)$$

Para calcular el coeficiente, multiplicamos
Por $\sin(k_s x)$, e integramos.

$$\int_0^l y(x, 0) \sin(k_s x) dx = \sum_1^{\infty} a_n \int_0^l \sin(k_s x) \sin(k_n x) dx$$

$$y(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(w_n t)$$

Para calcular el coeficiente, multiplicamos
Por $\sin(k_s x)$, e integramos.

$$\int_0^l y(x, 0) \sin(k_s x) dx = \sum_1^{\infty} a_n \int_0^l \sin(k_s x) \sin(k_n x) dx$$

Y por ortogonalidad, podemos recuperar

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^a \frac{hx}{a} \sin(k_n x) dx + \frac{2}{l} \int_a^l \frac{h(l-x)}{l-a} \sin(k_n x) dx$$

$$y(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(w_n t)$$

Para calcular el coeficiente, multiplicamos
Por $\sin(k_s x)$, e integramos.

$$\int_0^l y(x, 0) \sin(k_s x) dx = \sum_1^{\infty} a_n \int_0^l \sin(k_s x) \sin(k_n x) dx$$

Y por ortogonalidad, podemos recuperar

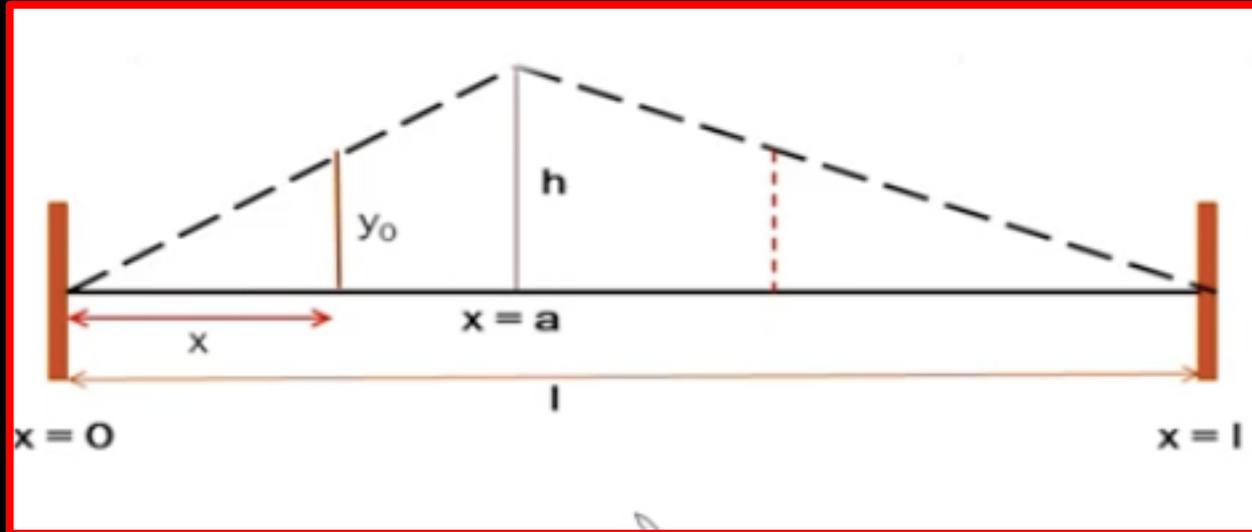
$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^a \frac{hx}{a} \sin(k_n x) dx + \frac{2}{l} \int_a^l \frac{h(l-x)}{l-a} \sin(k_n x) dx$$

Y si integramos

$$a_n = \frac{2h \sin(k_n a)}{a(l - a)k_n^2}$$

Y esta es la expresion de **todos los coeficientes** de los modos que entran en juego al generar una Perturbacion inicial triangular.

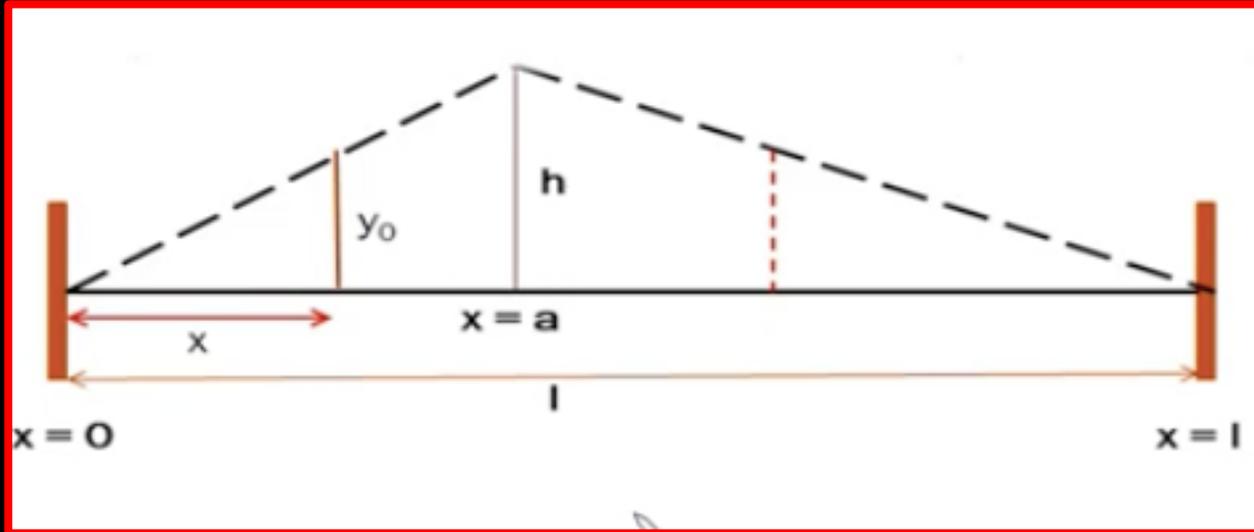
Analicemos la expresion de a_n



$$y = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right)$$

Solo los primeros armonicos
son audibles

Analicemos la expresion de a_n

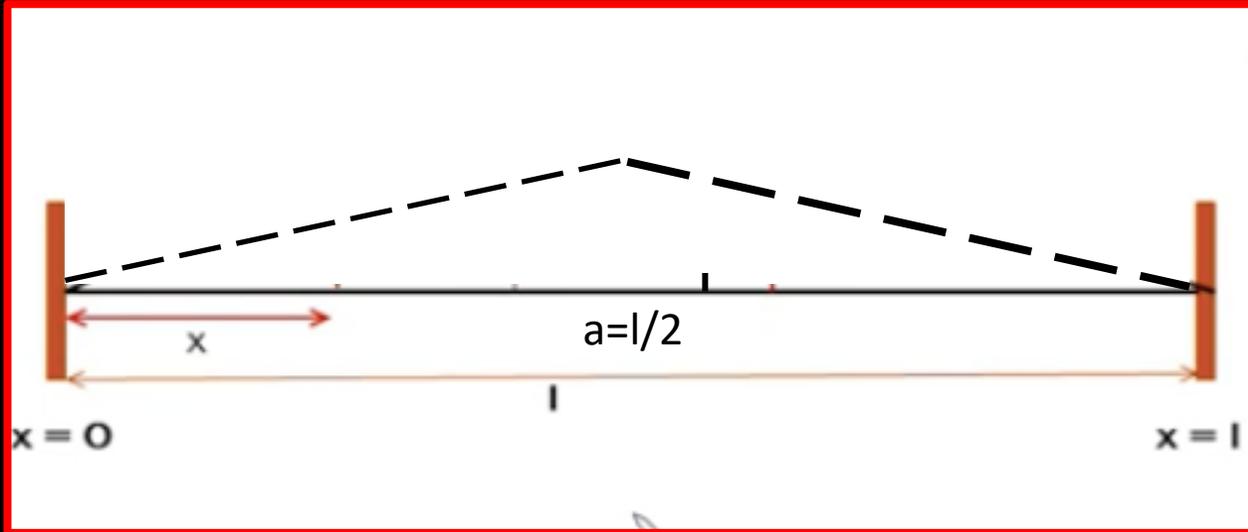


El n-esimo armonico no esta presente

$$\rightarrow \text{Si } \frac{n\pi a}{l} = p\pi, n = \frac{pl}{a}$$

$$y = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)\right)$$

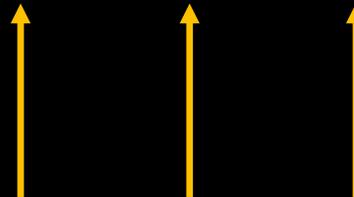
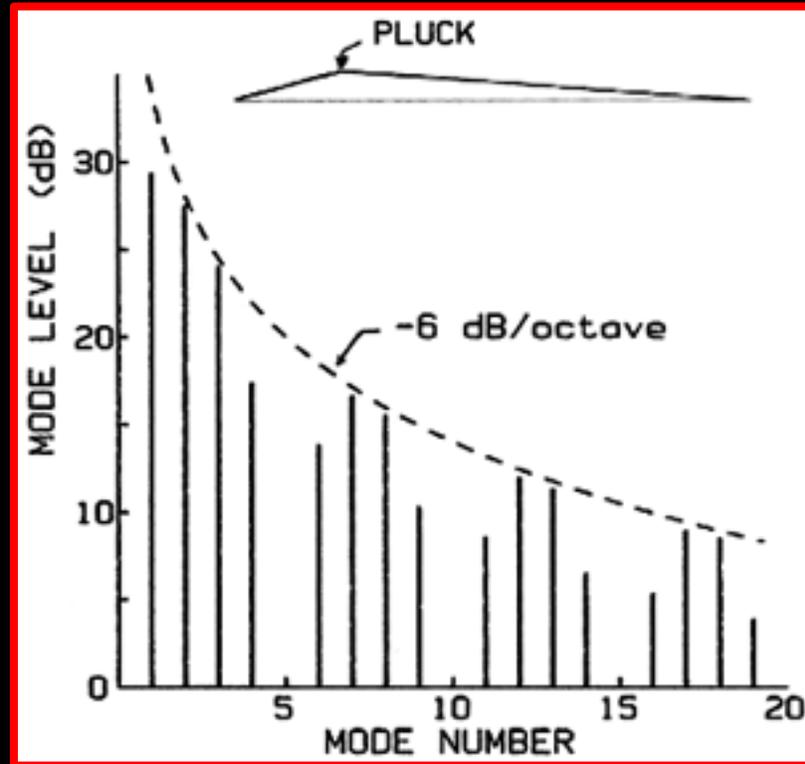
Analicemos la expresion de a_n



Si $a=l/2$, todos los terminos con $n=2p$ estaran ausentes

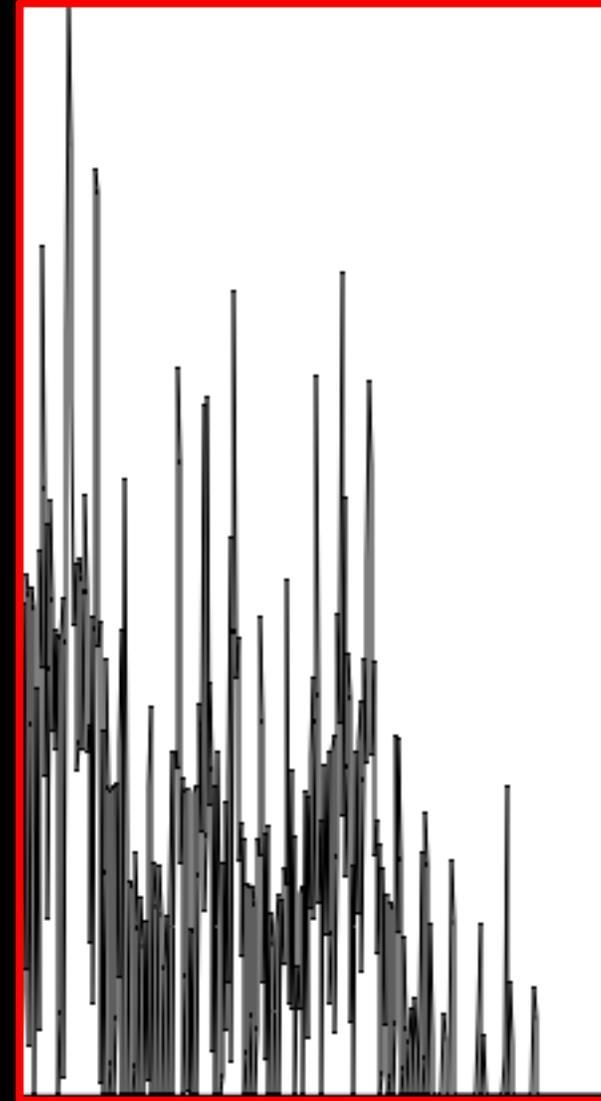
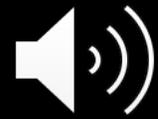
$$y = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)\right)$$

El timbre, afectado profundamente por donde se pulsa la cuerda



$$a = \frac{l}{5}$$

Grabando una cuerda en una
guitarra electrica apagada

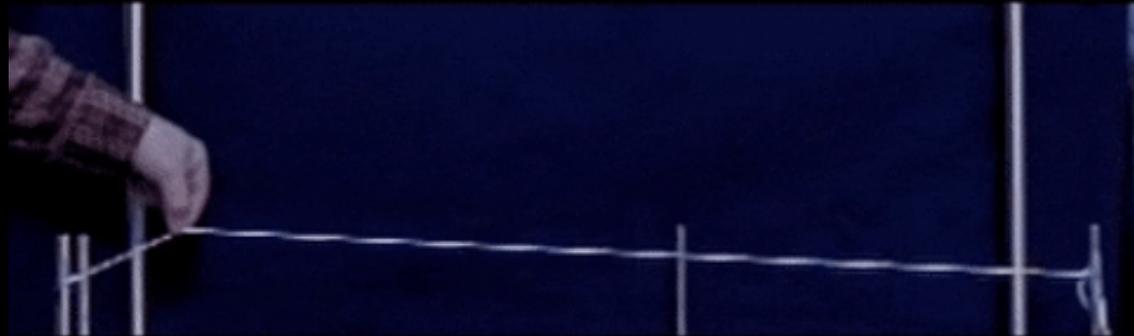


Con esta expresion, podemos regenerar para todo tiempo,
la dinamica de evolucion de la cuerda

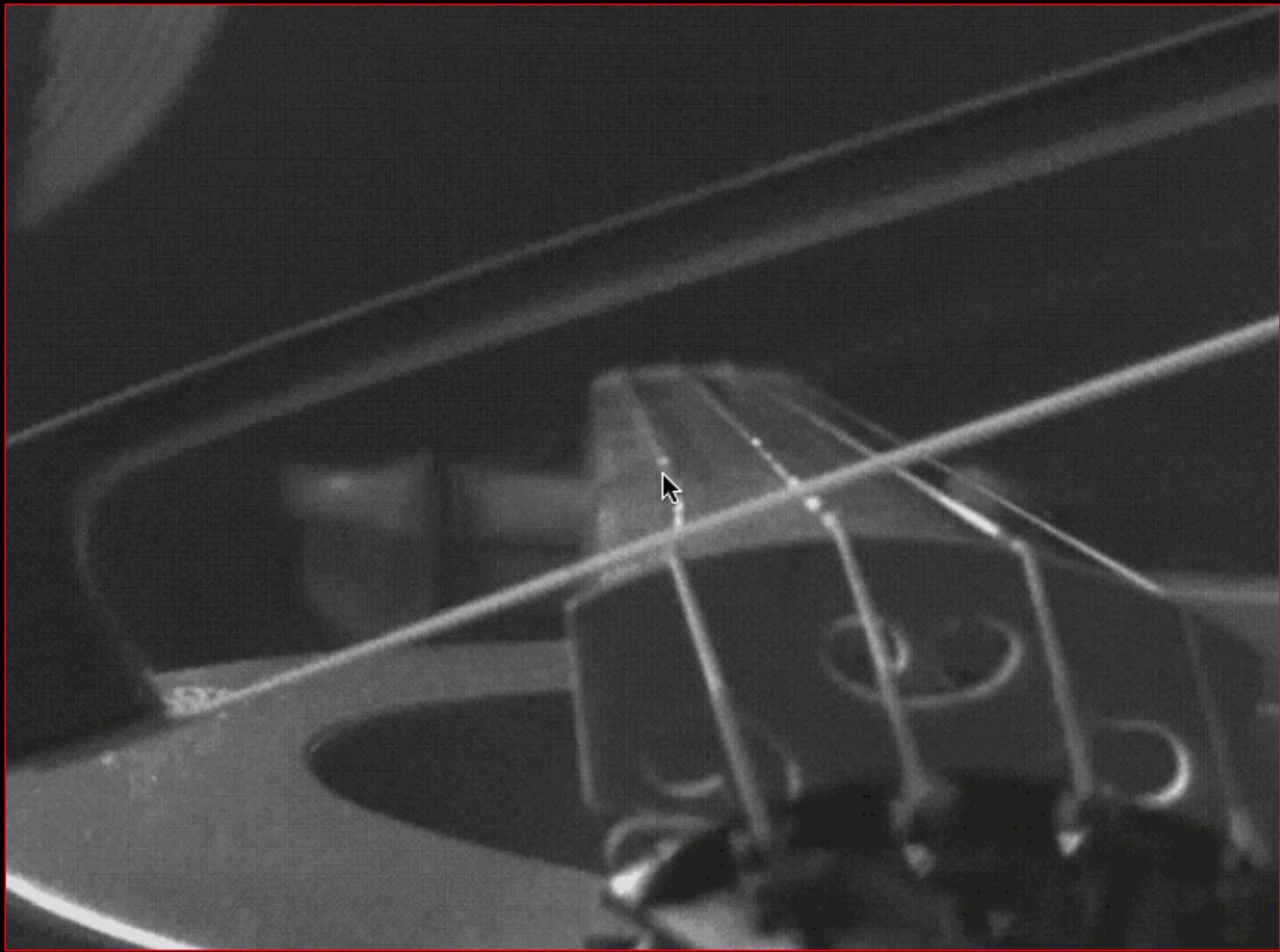
$$y = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) (a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right))$$

Pero es una expresion un poco arida..., y la
interpretacion geometrica no es transparente

Tener la descomposicion de Fourier no hace muy transparente la interpretacion de la pelicula



Para interpretar la pelicula original en terminos de la matematica que conocemos, ayudan los modos de Helmholtz



Modos de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Solucion general

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Con $f_{1,2}$ funciones arbitrarias que nos permiten ajustar

$$y(x, 0), \dot{y}(x, 0)$$

 $x = 0$

$x = L$

Modos de Helmholtz

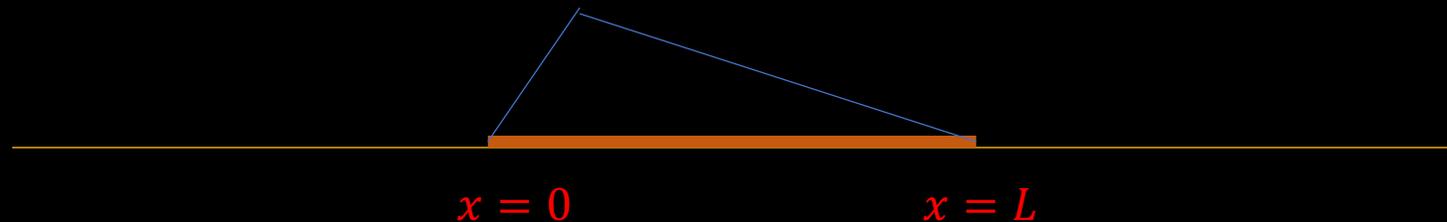
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Solucion general

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

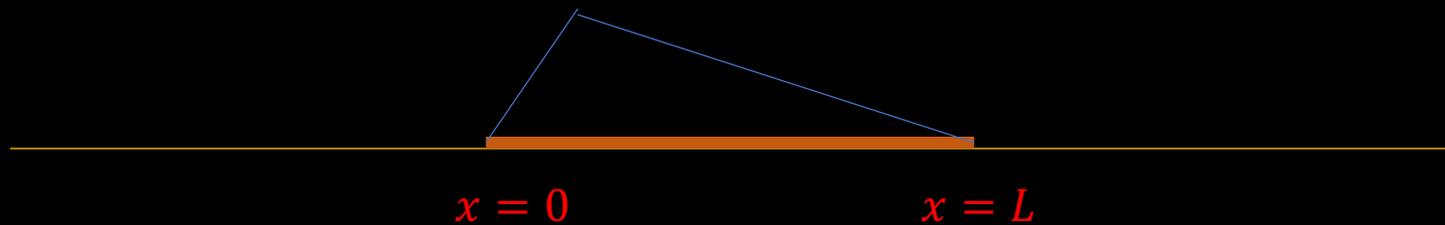
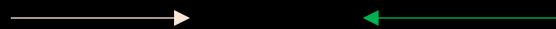
Con $f_{1,2}$ funciones arbitrarias que nos permiten ajustar

$$y(x, 0), \dot{y}(x, 0)$$



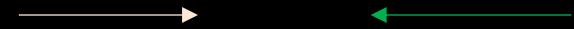
Solucion general

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$



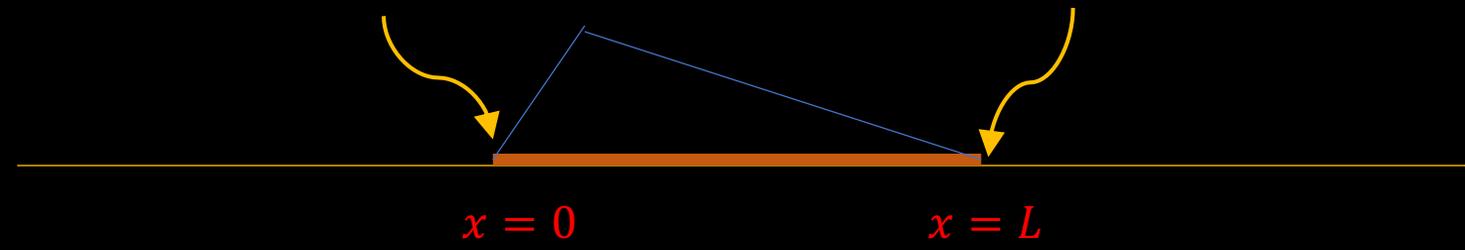
Solucion general

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$



$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0, \quad \text{para todo } t$$



Solucion general

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

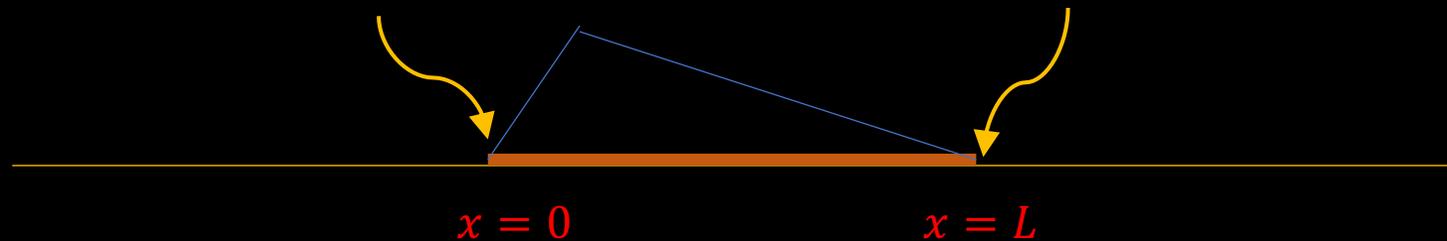


si

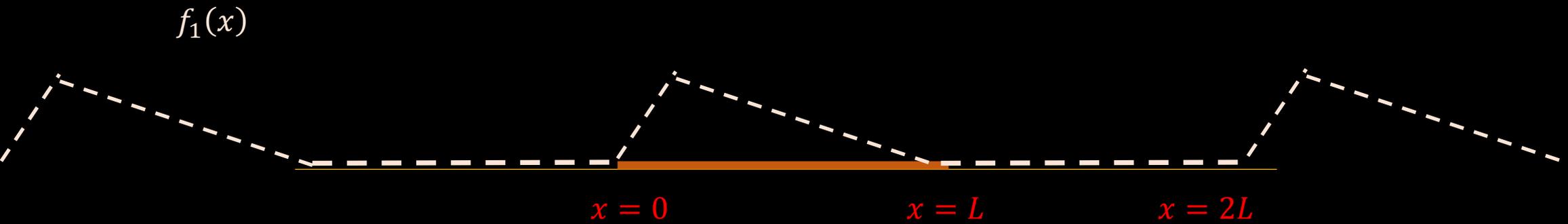
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = -f_2(-x) \\ f_1(x) = -f_2(2L - x) \end{array} \right.$$

$$y(0) = 0$$

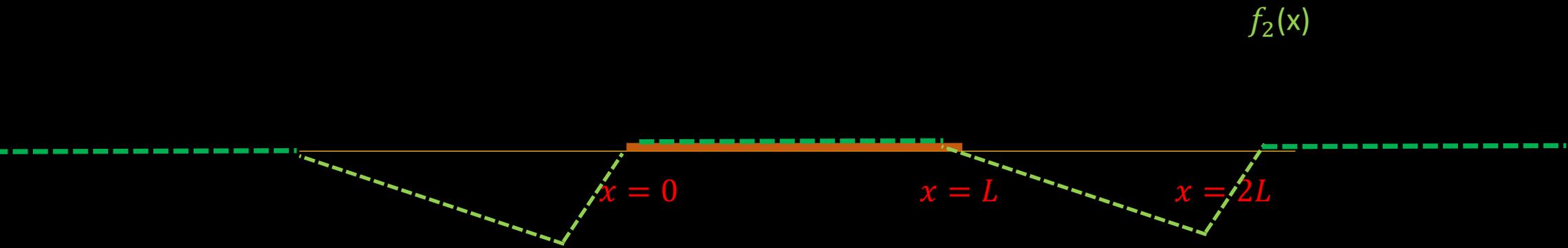
$$y(L) = 0, \quad \text{para todo } t$$



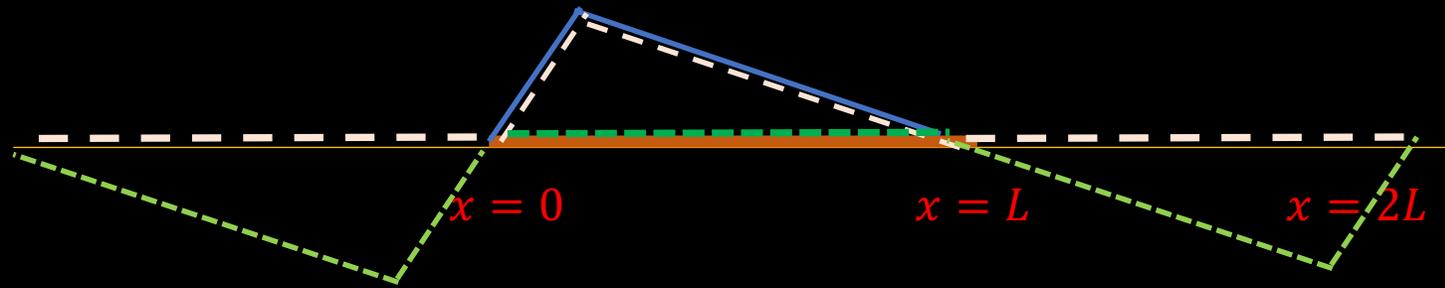
Vamos a buscar dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condicion inicial para el desplazamiento original



Vamos a buscar dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condicion inicial para el desplazamiento original



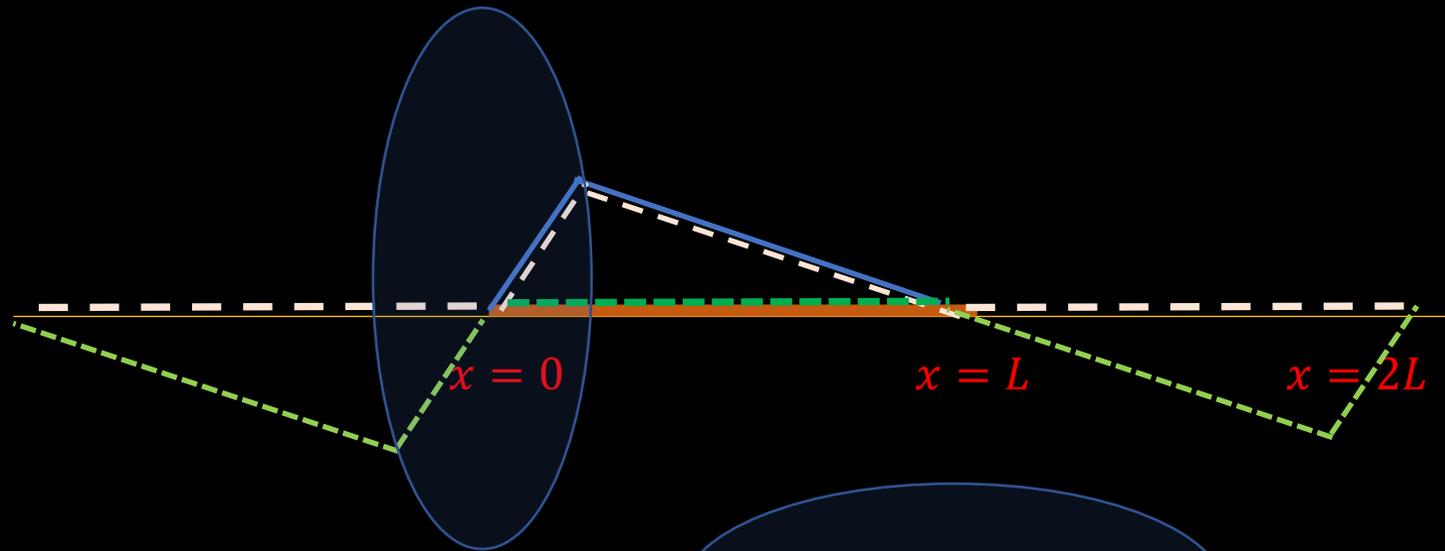
Vamos a buscar dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condicion inicial para el desplazamiento original



Vemos que
cumplen estas
condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = -f_2(-x) \\ f_1(x) = -f_2(2L - x) \end{array} \right.$$

Vamos a buscar dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condicion inicial para el desplazamiento original

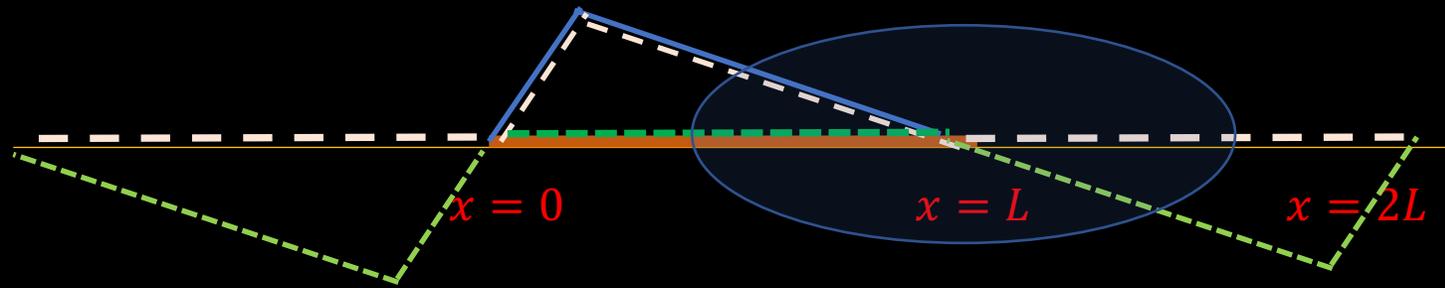


Vemos que
cumplen estas
condiciones

$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

$$f_1(x) = -f_2(2L - x)$$

Vamos a buscar dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condicion inicial para el desplazamiento original

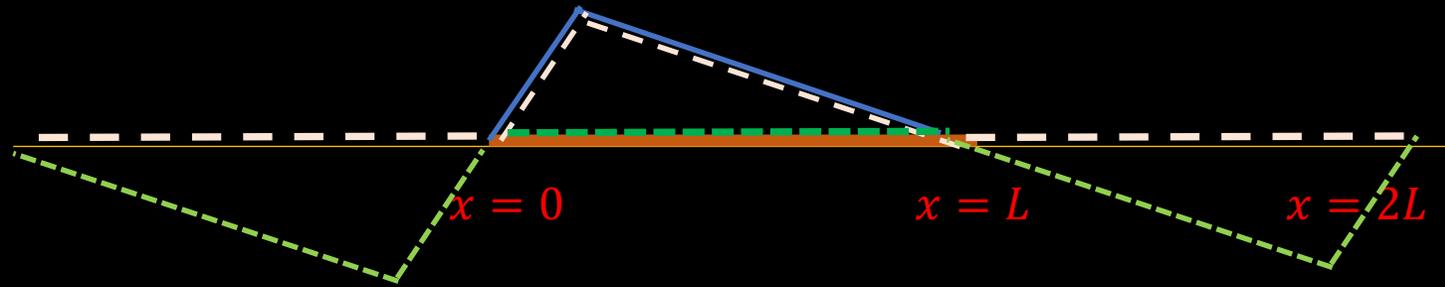


Vemos que
cumplen estas
condiciones

$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

$$f_1(x) = -f_2(2L - x)$$

Aquí hay dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condición inicial para el desplazamiento original



Vemos que cumplen estas condiciones

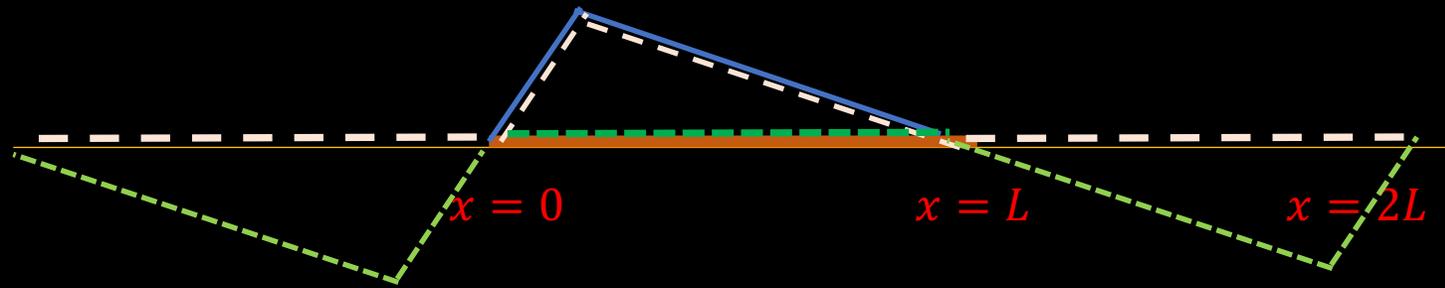
$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

$$f_1(x) = -f_2(2L - x)$$

Y así:

$$y(L, t) = f_1(L - ct) + f_2(L + ct) = -f_2(2L - (L - ct)) + f_2(L + ct) = 0$$

Aquí hay dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con las que se puede armar una condición inicial para el desplazamiento original



Vemos que cumplen estas condiciones

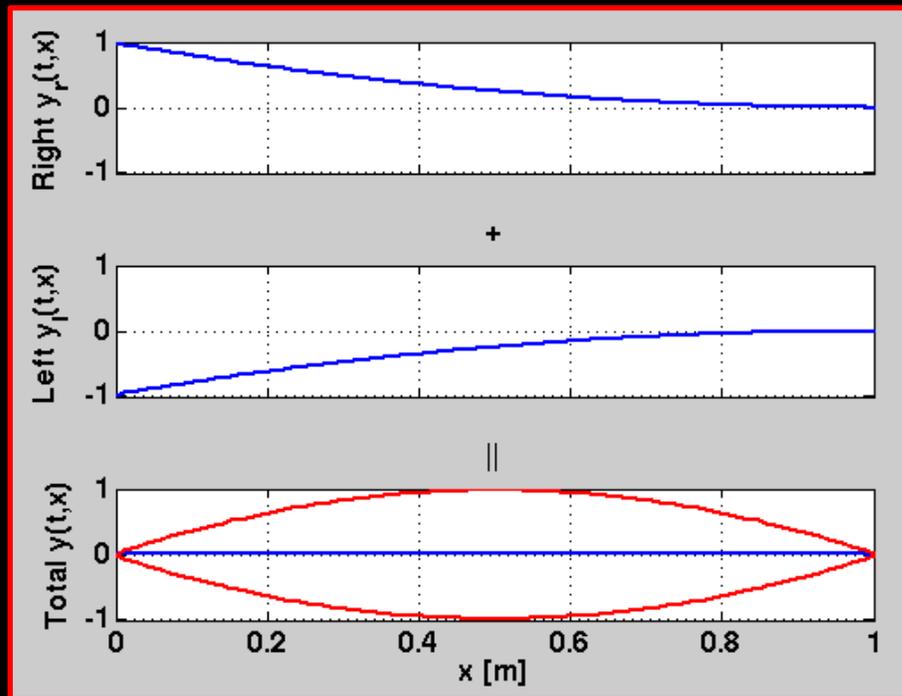
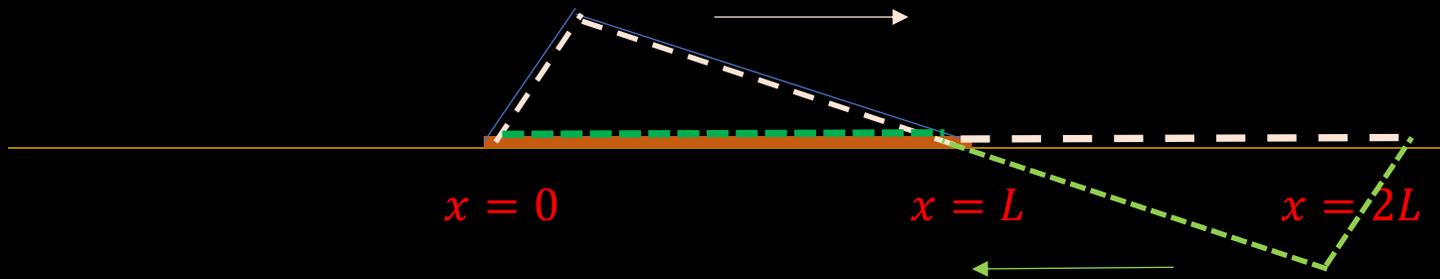
$$f_1(x) = -f_2(-x)$$

$$f_1(x) = -f_2(2L - x)$$

Y así:

$$y(0, t) = f_1(0 - ct) + f_2(0 + ct) = -f_2(-(-ct)) + f_2(0 + ct) = 0$$

De modo que al avanzar la onda marfil a la derecha, y la verde a la izquierda, se genera el perfil del tercer panel



Onda color marfil, viajando a la derecha

Onda color verde, viajando a la izquierda

Onda color azul, resultado de sumar

Observacion: las funciones f_1 y f_2

son arbitrarias, y se ajustan para que se

Satisfagan las condiciones de campos de deformacion

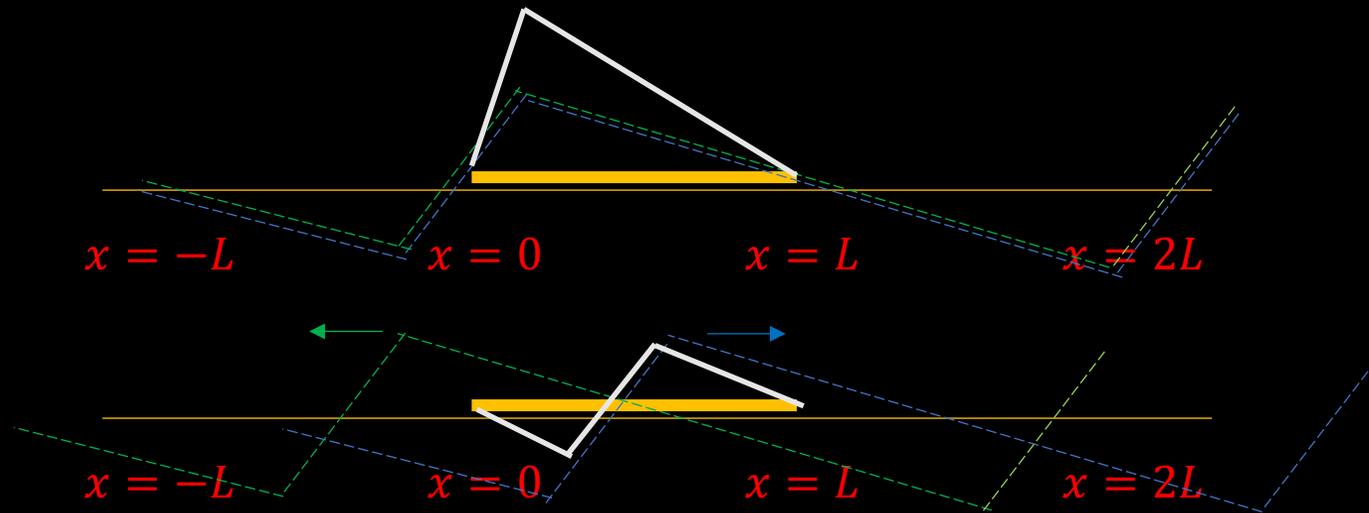
Y velocidad inicial, ademas de las condiciones de contorno.

Si
pedimos

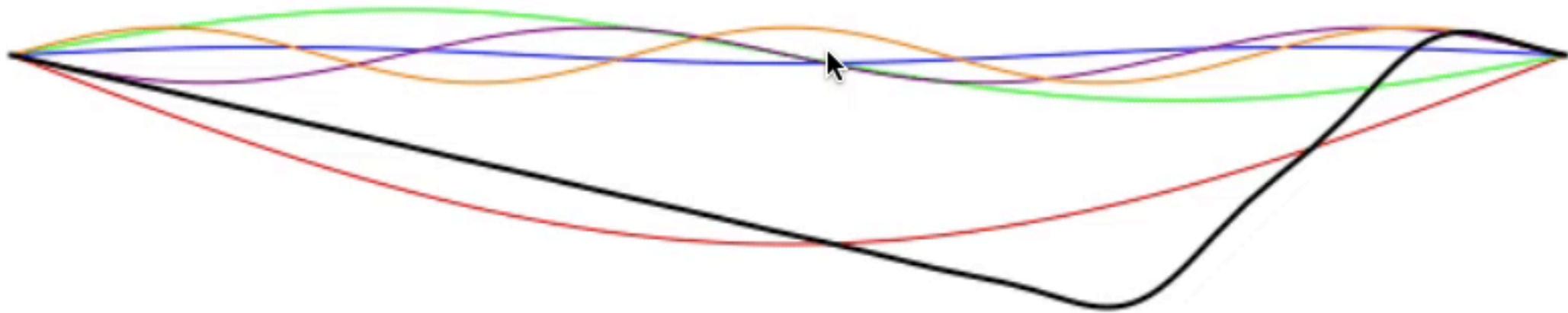
$$f_1(x) = -f_2(-x) = f_2(x)$$

$$f_1(x) = -f_2(2L - x) = f_2(x)$$

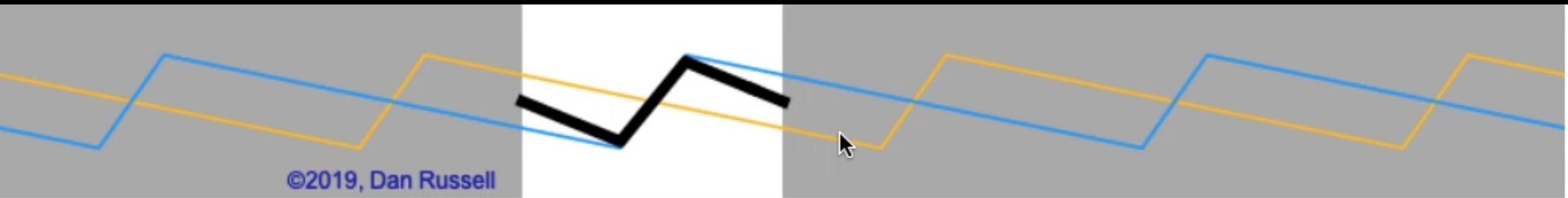
Estamos pidiendo mas que antes. En este caso, el perfil puede presentar maximo y minimo.



Pregunta: ¿como es la velocidad inicial, comparada con el ejemplo anterior?



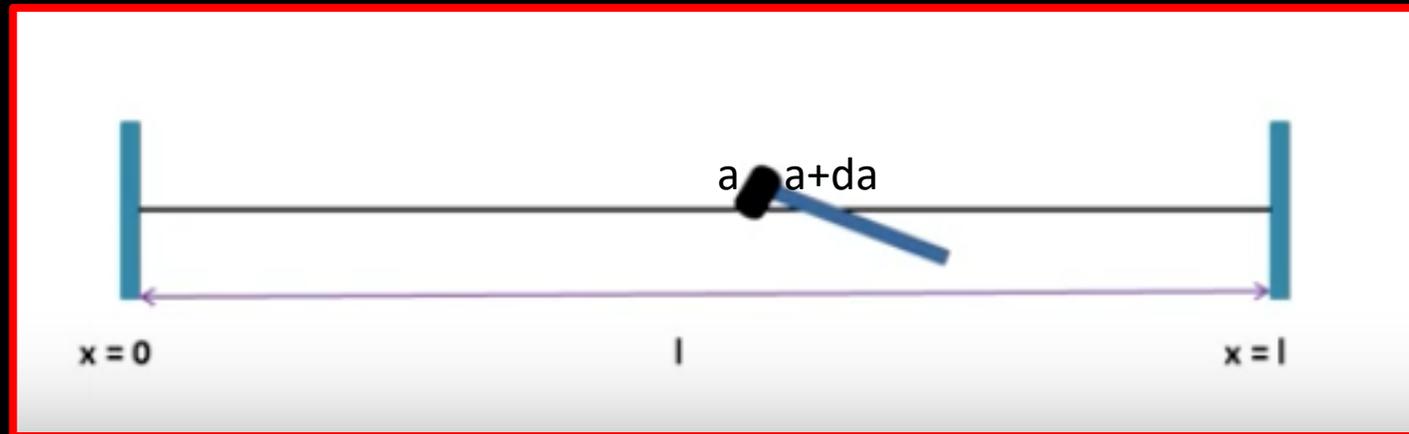
©2012, Dan Russell



©2019, Dan Russell

La cuerda golpeada

(o de por que suena mas "rico", menos chillon, un piano que un clave)



$$\dot{y}(x, 0) = \sum_1^{\infty} w_n \sin(k_n x) b_n = \dot{y}_0$$

$$\int_0^l \dot{y}_0 \sin(k_s x) dx = \sum_1^{\infty} w_n b_n \underbrace{\int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_s x) dx}_{\substack{l/2 \text{ si } n = s, \\ 0 \text{ si } n \neq s}}$$

$$b_s = \frac{2}{lw_s} \int_0^l \dot{y}_0 \sin(k_s x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{lw_s} \int_a^{a+da} \dot{y}_0 \sin(k_n x) dx \sim \frac{2}{lw_s} \sin(k_n a) \underbrace{\int_a^{a+da} \dot{y}_0 dx}_A$$

$$y(x, t) = \frac{2A}{l} \sum_1^{\infty} \frac{1}{w_n} \sin(k_n a) \sin(k_n x) \sin(w_n t)$$

$$y(x, t) = \frac{2A}{\pi c} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)$$

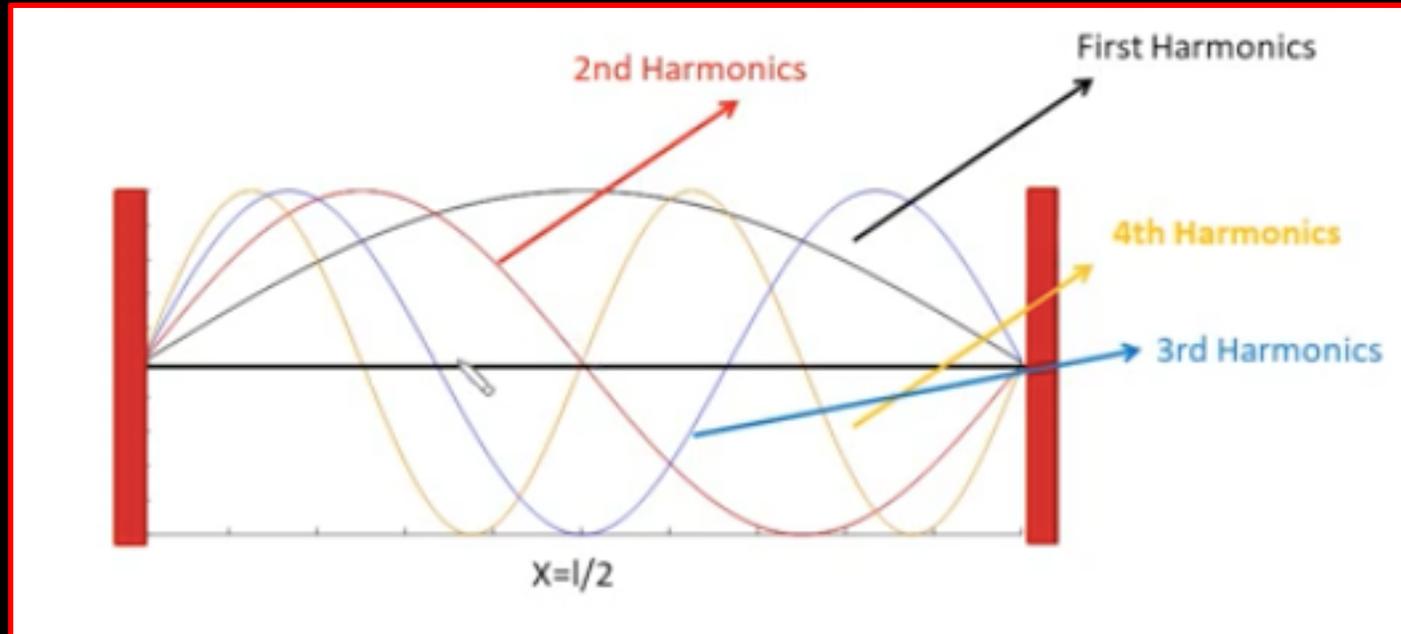
Es lo que da riqueza armónica a la cuerda golpeada:
por eso es tan rico el sonido del piano

$$y(x, t) = \frac{2A}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)$$

El armonico n-esimo estara ausente si. $\sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) = 0$

$$\frac{n\pi a}{l} = p\pi$$

Por ejemplo, si $a = \frac{l}{2}$, $n = 2p$ estara ausente (todos los armonicos pares!)



Si golpeamos en $l/2$, todos los armonicos con un nodo alli (el segundo, el cuarto..) estaran ausentes

Ya tenemos para tres fuentes sonoras una descripción espectral precisa.

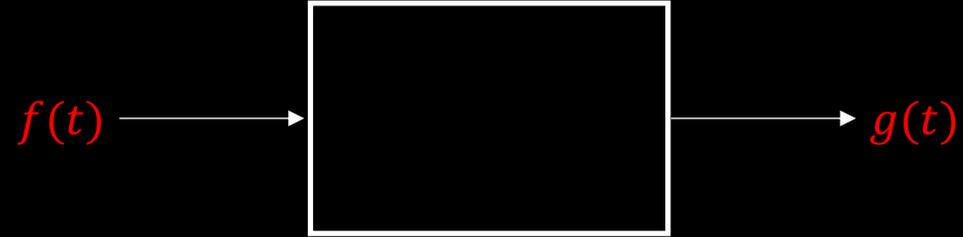
Ahora necesitamos avanzar en dos frentes:

1. Como entender las respuestas espectrales de distintos mecanismos de **amplificación**
2. Como combinar nuestras descripciones espectrales de las **fuentes y los amplificadores** para obtener una idea del comportamiento espectral final de un instrumento

Un amplificador



Un amplificador



Podemos expresar a la función de entrada como una “suma continua” de componentes armónicas

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Un amplificador

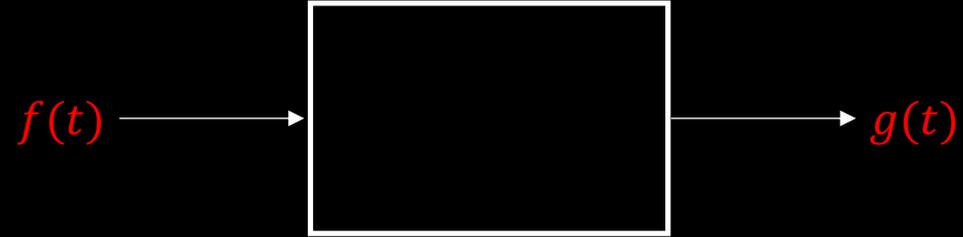


$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$g_{\omega}(t) = \varphi(\omega) e^{i\omega t}$$

Factor de amplificación de cada componente

Un amplificador



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$g_{\omega}(t) = \varphi(\omega) e^{i\omega t}$$

Factor de amplificación de cada componente

Como el amplificador, asumimos que es **lineal**, podemos escribir la salida así:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Pensando a $\varphi(\omega)$ como
la inversa de alguna función $\Phi(t)$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La función amplificada resulta
la transformada del producto
de dos transformadas inversas:
 $\varphi(\omega)F(\omega)$

Pensando a $\varphi(\omega)$ como
la inversa de alguna función $\Phi(t)$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La función amplificada resulta
la transformada del producto
de dos transformadas inversas:
 $\varphi(\omega)F(\omega)$

$F(\omega)$

Sabemos bien que es: la transformada de la fuente

Pensando a $\varphi(\omega)$ como
la inversa de alguna función $\Phi(t)$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La función amplificada resulta
la transformada del producto
de dos transformadas inversas:
 $\varphi(\omega)F(\omega)$

$F(\omega)$

Sabemos bien que es: la transformada de la fuente

Vemos como interpretar $\varphi(\omega)$

Pista: usaremos el teorema de la convolución

Vemos como interpretar $\varphi(\omega)$

Pista: usaremos el teorema de la convolucion

Por ser la transformada del
producto de dos transformadas
inversas

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Vemos como interpretar $\varphi(\omega)$

Pista: usaremos el teorema de la convolucion

Por ser la transformada del
producto de dos transformadas
inversas

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Y sumandole causalidad, que es $\Phi(t - \tau) = 0, \tau > t$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Entonces, tomemos esta expresion

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Y pensemos que $f(\tau) = \delta(\tau)$

Un golpazo seco!

Entonces, tomemos esta expresion

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Y pensemos que $f(\tau) = \delta(\tau)$

entonces

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$$

Y lo podemos calcular explicitamente
porque integrar la delta es facil

Entonces, tomemos esta expresion $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$

Y pensemos que $f(\tau) = \delta(\tau)$

entonces $g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$

Que es: $g(t) = \begin{cases} \Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Entonces, tomemos esta expresion $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$

Y pensemos que $f(\tau) = \delta(\tau)$

entonces $g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau$

Que es: $g(t) = \begin{cases} \Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Y de ahi interpretamos a Φ :
es la respuesta del amplificador a
un impulso

El espectro de una señal que resulta de amplificar otra, se calcula a partir del espectro de la señal original, y el de la respuesta del amplificador a un impulso repentino

Wood



Woods used for guitars show a high stiffness to weight ratio



Wood



Woods used for guitars show a high stiffness to weight ratio



De una tabla a un stradivarius hay una distancia... pero es el primer paso.