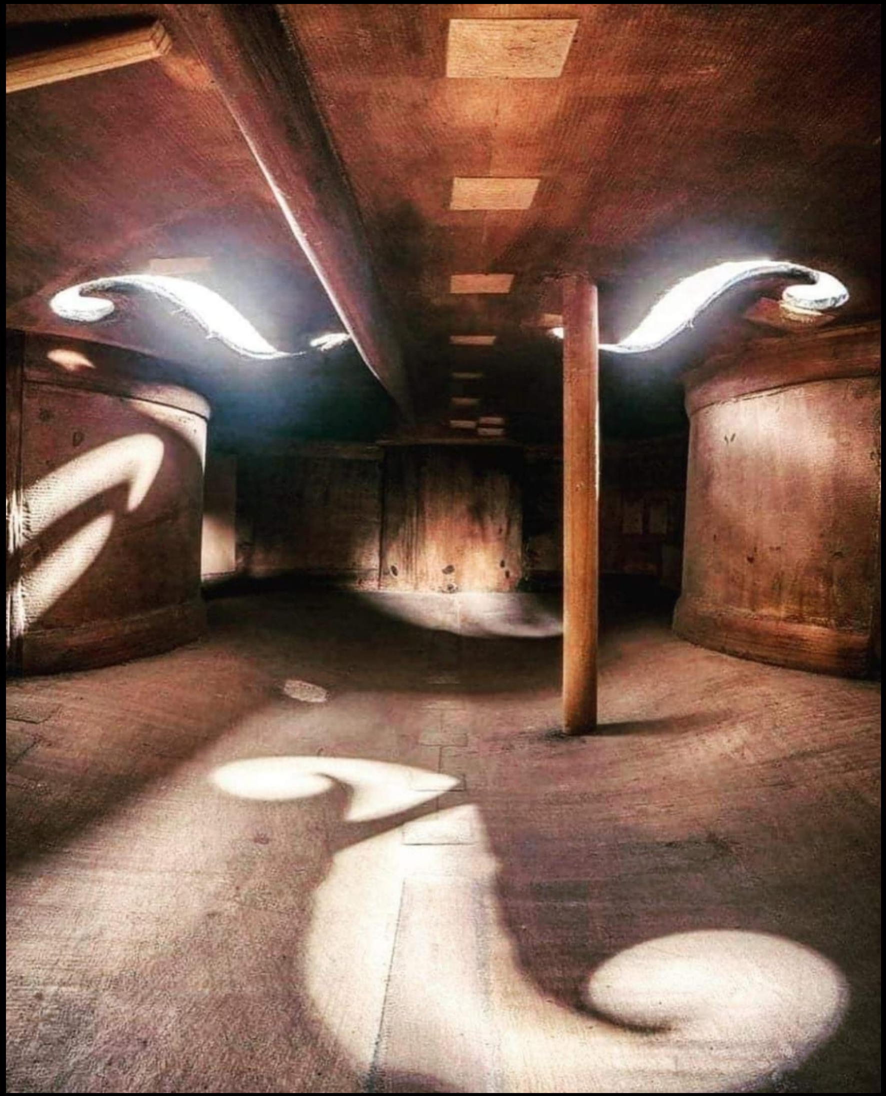
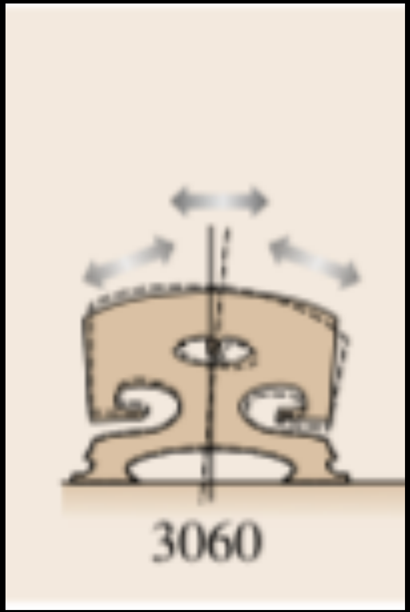
Amplificando la señal de la fuente sonora
Resonadores

La clase de hoy es sobre resonadores.



Para ser precisos, del despazamiento aun falta un poquito para calcular
la fuerza con la que excitaremos a la cavidad del violin.

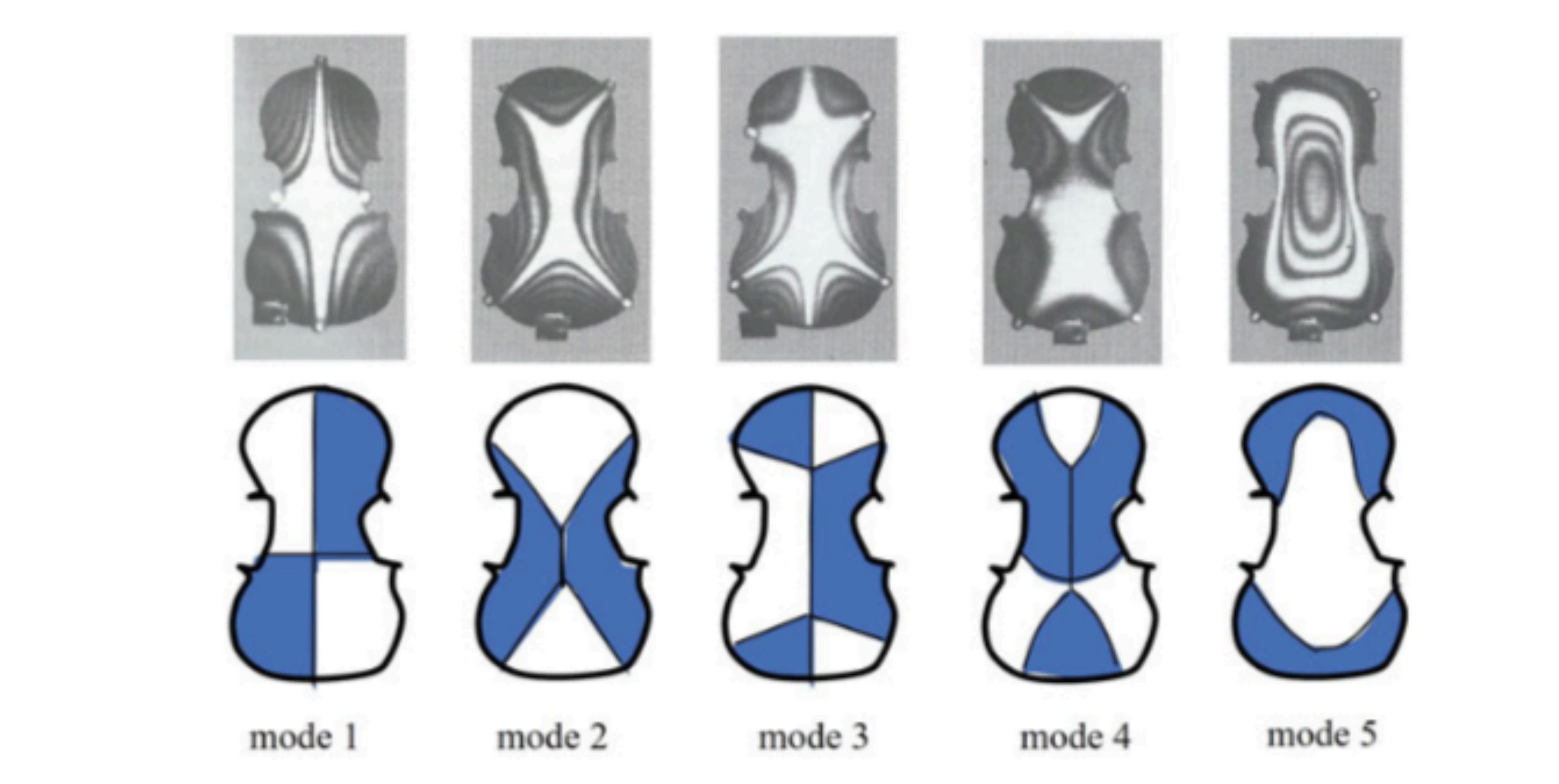


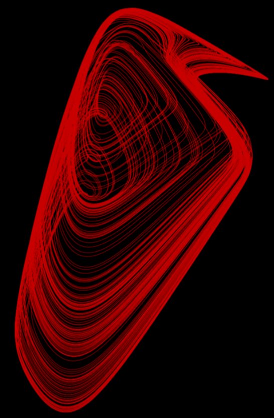
El puente, afectado por la fuerza que ejerce
Sobre el la cuerda, es la responsible de forzar a
La tabla sobre la que esta apoyada.

En este punto, la fuerza que se ejerce sobre el puente es:

$$F = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0$$

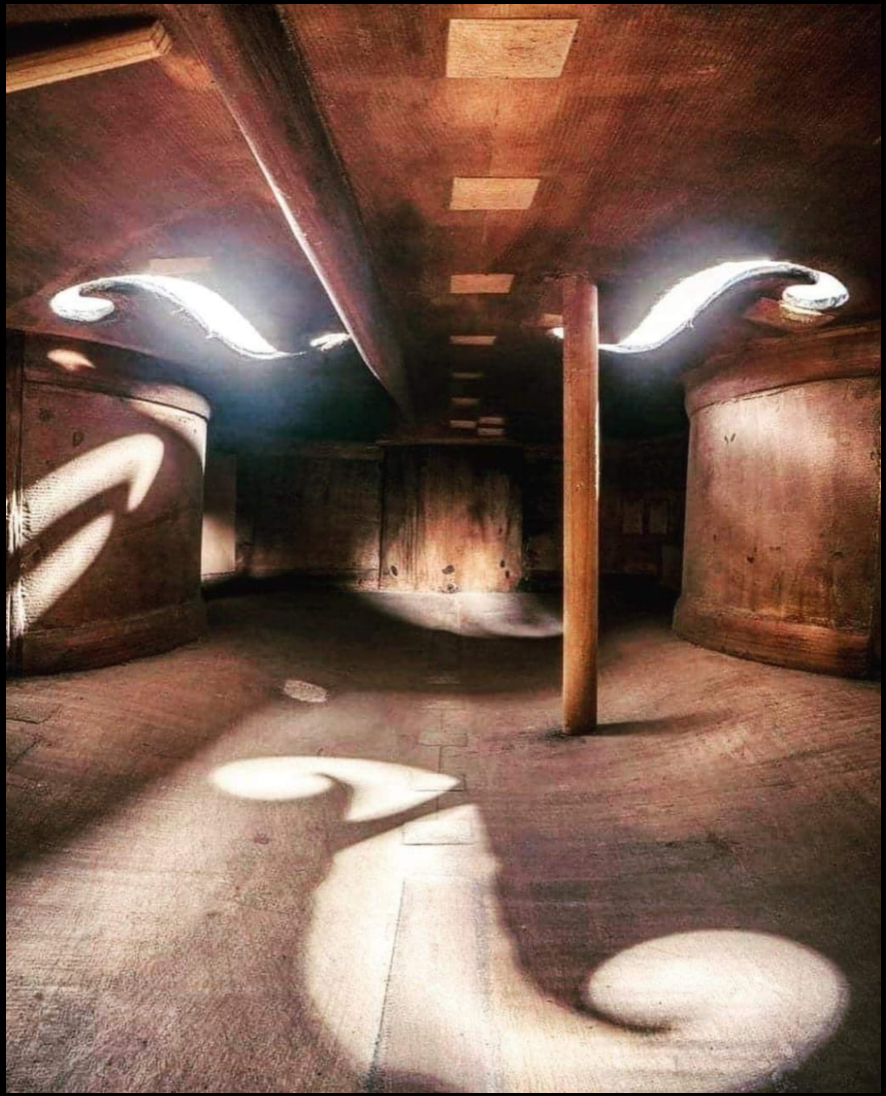
De este modo, la fuerza que excita a la tabla vía el puente es una onda triangular


mode 1
mode 2
mode 3
mode 4
mode 5

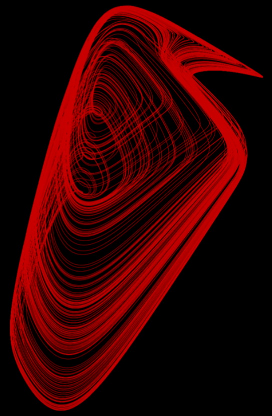


La clase de hoy es sobre
resonadores;

Como esas vibraciones en una
tabla son procesadas por
una cavidad.



Empecemos repasando las ecuaciones de la acústica



Conservacion del momento

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{grad}\, P + \rho\, \boldsymbol{F}$$

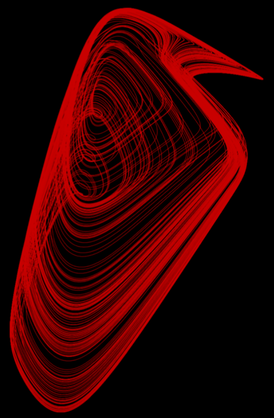
Para un elemento de fluido: porcion infinitesimal de masa constante, cuya historia seguimos mientras se mueve con el fluido (mirada Lagrangiana).
F es la fuerza por unidad de masa.

Conservacion del momento

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{grad})\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{grad}\, P + \rho\, \boldsymbol{F}$$

La descripcion Euleriana, en la cual computamos campos, y no velocidades de elementos de masa.

Empecemos repasando las ecuaciones de la acústica



Conservacion del momento

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{P} + \rho\,\boldsymbol{F}$$

Conservacion del momento

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{grad})\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{grad}\,P + \rho\,\boldsymbol{F}$$

Que podemos linealizar.
Si $P = p_0 + p, \rho = \rho_0 + \rho'$

Conservacion del momento linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{grad}\,P + \rho_0 \boldsymbol{F}$$

Empecemos repasando las ecuaciones de la acústica

Conservacion de la masa

$$\mathbf{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho q(\boldsymbol{r}, t)$$

Donde $q(\boldsymbol{r}, t)$ es la tasa de incremento de volumen de fluido, metida por una fuente, por unidad de volumen

Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\, \boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)$$

Para poder vincular a la presion y la densidad,
necesitamos un poquito de termodinamica.

Una ecuacion de estado para el gas vincula a la presion, el volumen y la temperatura, por lo cual cualquier cantidad termodinamica se expresa en termino de dos variables. elijamos la presion y el volumen (o lo que es lo mismo, la presion y la densidad). En particular los cambios de entropia asociados a un proceso acustico se pueden escribir como:

$$dS = a\,dp + b\,d\rho$$

Pero en los procesos acusticos, asumimos no hay transferencia de calor, por lo que asumimos isentropia, o sea, dS =0

$$dS = a\,dp + b\,d\rho = 0$$

$$dp = -\frac{b}{a}\,d\rho \equiv \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_S d\rho = \rho \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_S \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\chi_s}\frac{d\rho}{\rho}$$

asi que, linealizada,

$$p = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}\rho'$$

Resumiendo:

Conservacion del momento linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{grad}\, p + \rho_0 \boldsymbol{F}$$

Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\, \boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)$$

Ecuación de estado linealizada

$$p = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \rho'$$

Resumiendo:

Conservacion del momento linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{p} + \rho_0 F$$

Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\,\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)$$

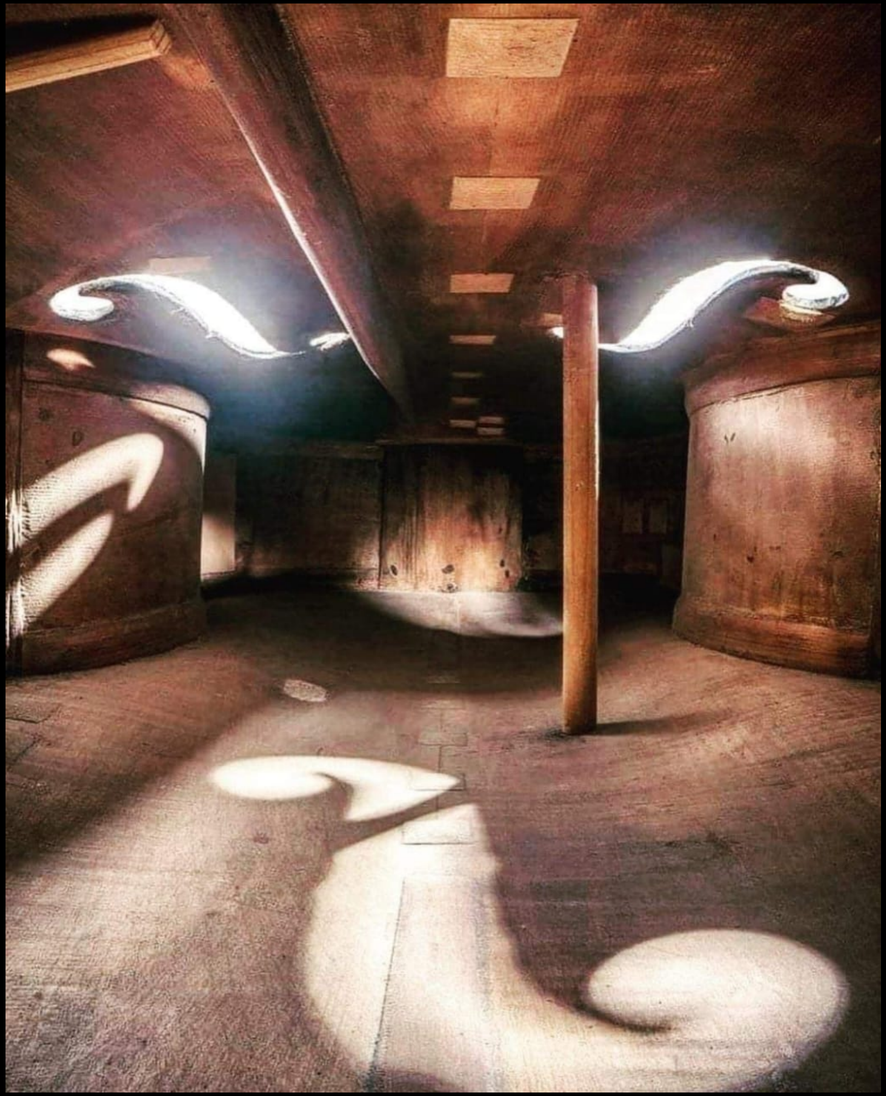
Ecuación de estado linealizada

$$p = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \rho'$$

$$\boxed{\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0\left(\nabla.\boldsymbol{F} - \frac{\partial q}{\partial t}\right)}$$

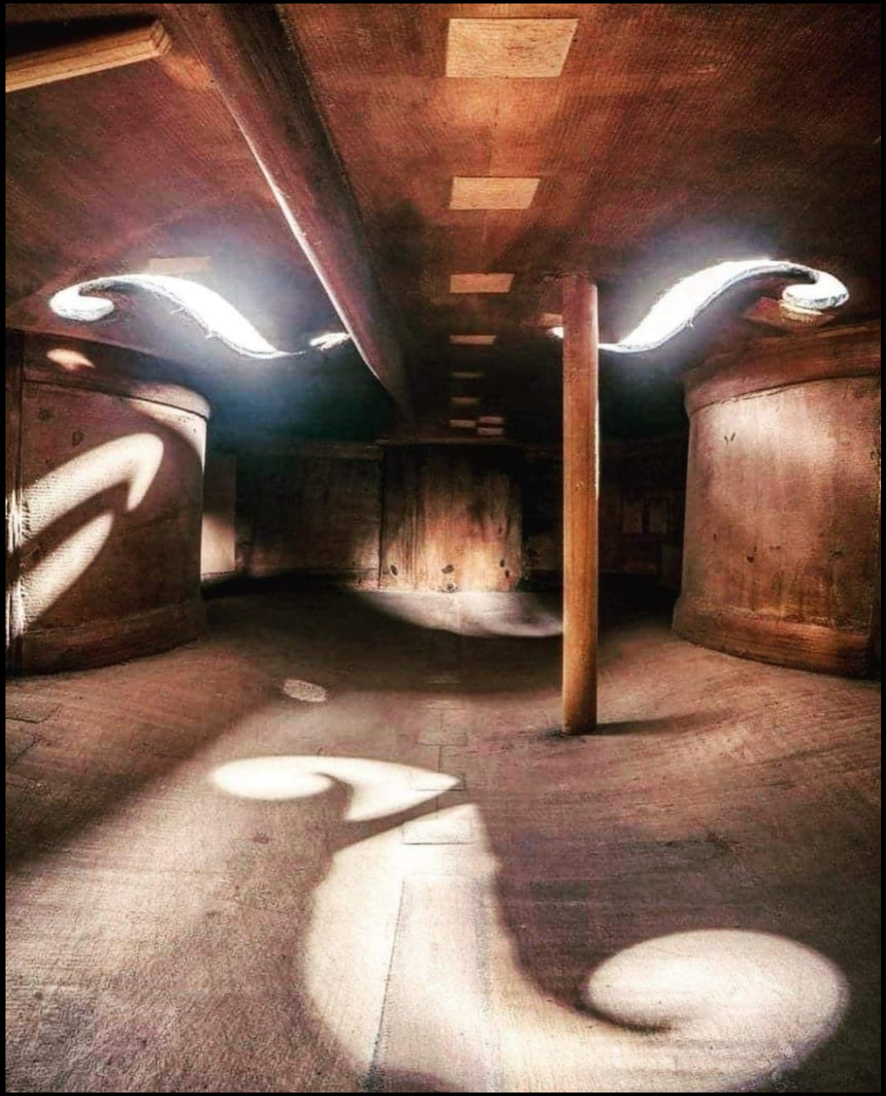
Donde $q(\boldsymbol{r}, t)$ es la tasa de incremento de volumen de fluido, metida por una fuente, por unidad de volumen

$\boldsymbol{F}$ es la fuerza por unidad de masa



Se puede plantear que la solucion
del problema de las ondas de presion
dn la cavidad es solo cuestion de plantear
las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0\left(\nabla . \boldsymbol{F} - \frac{\partial q}{\partial t}\right)}$$



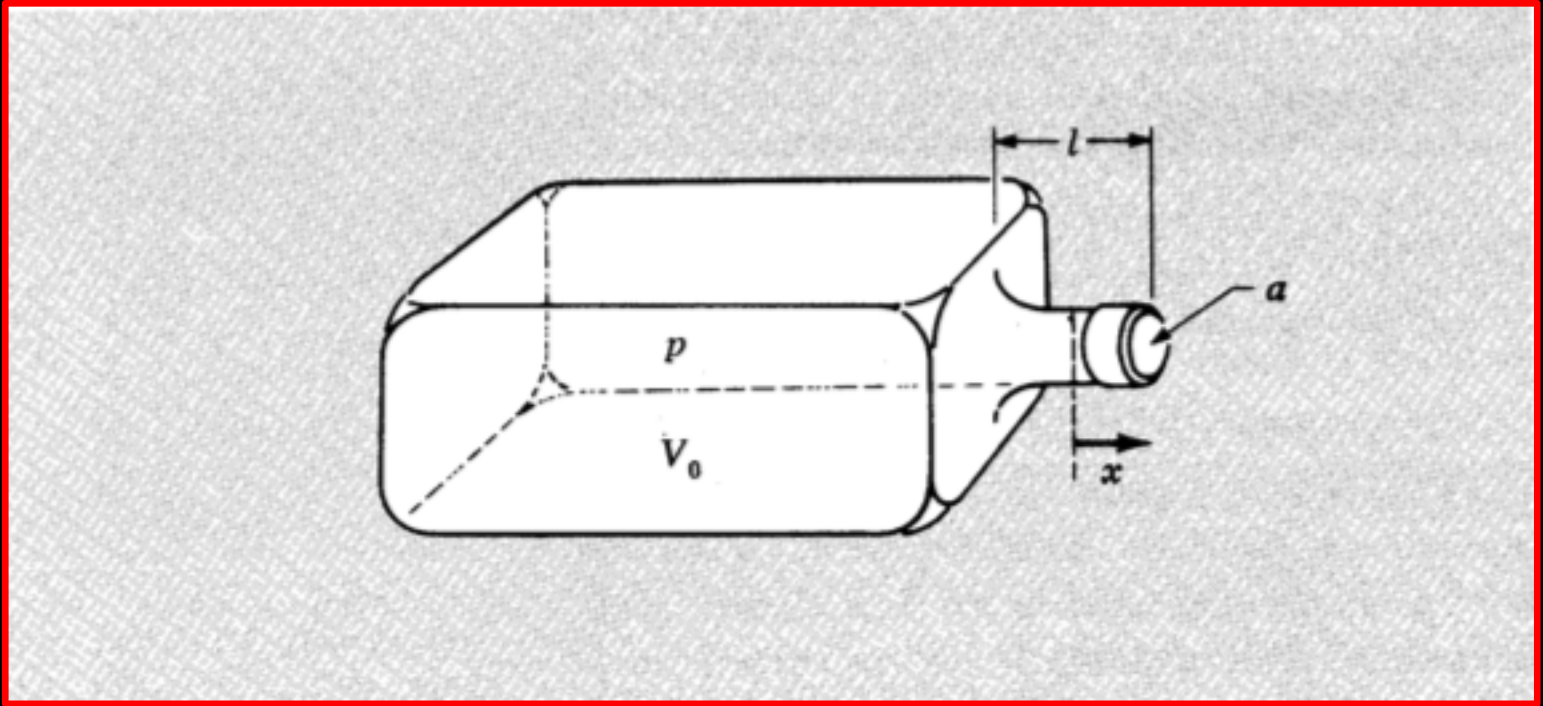
Se puede plantear que la solucion
del problema de las ondas de presion
dn la cavidad es solo cuestion de plantear
las siguientes ecuaciones:

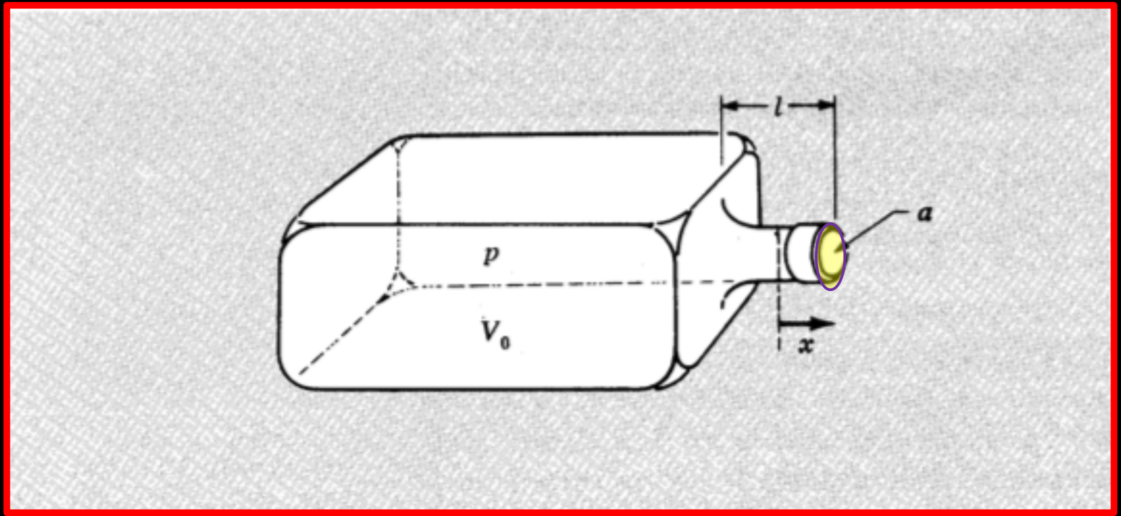
$$\boxed{\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0(\nabla.\boldsymbol{F} - \frac{\partial q}{\partial t})}$$

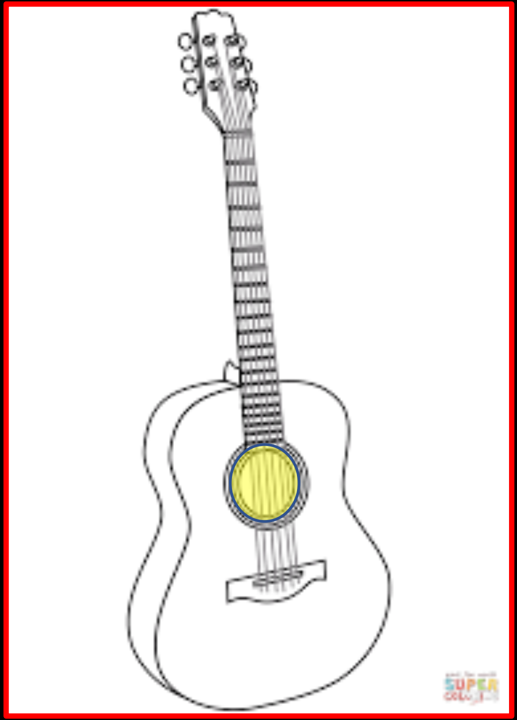
Y meter a las tablas como forzantes, empleando
los términos de la derecha en las ecuaciones

Pero existe otra estrategia, la de los “elementos agrupados”, que permite un tratamiento del problema en términos de ODEs, en cierto rango de frecuencias, para ciertas configuraciones.

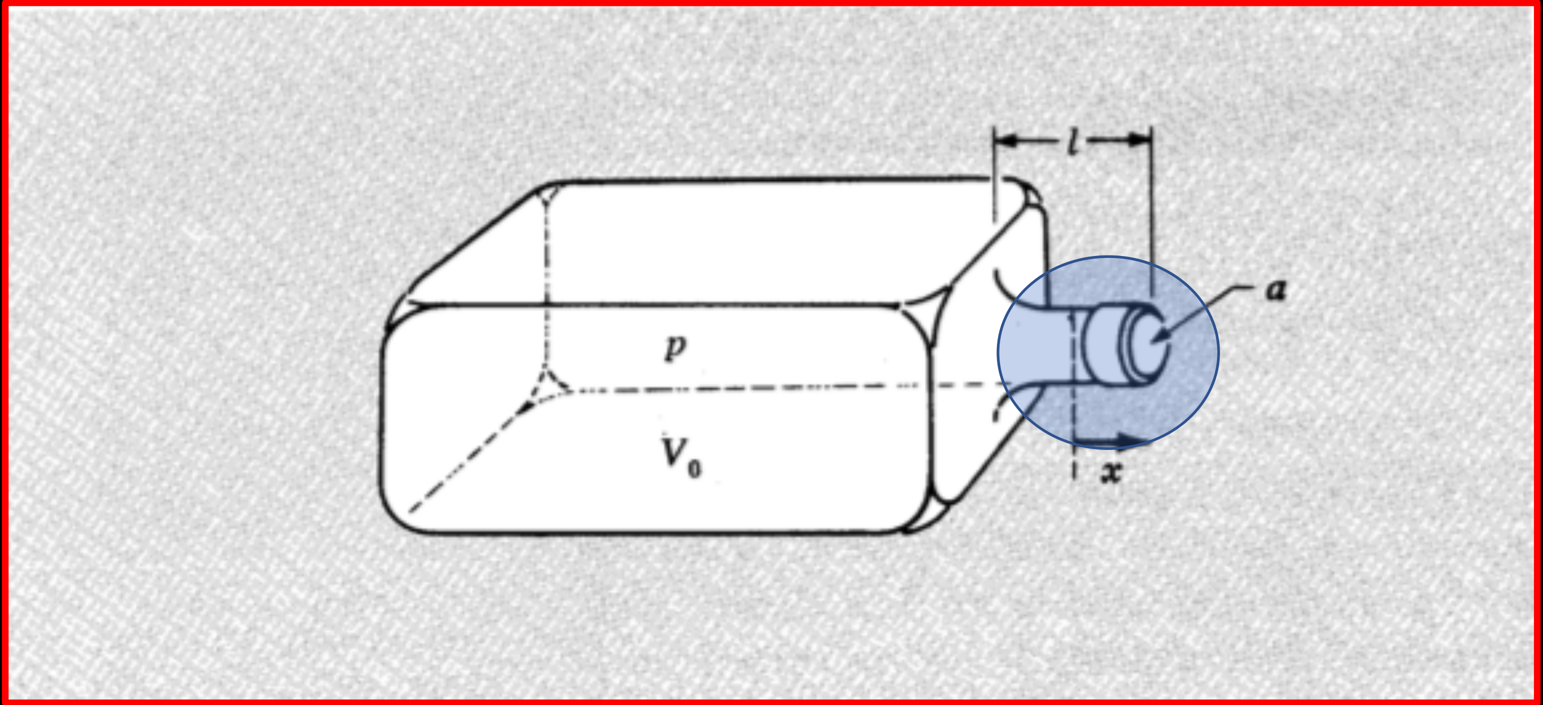
Imaginemos un problema como este:




l
a
p
V_0
x



Comencemos analizando el comportamiento de las variables cerca del cuello



Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\, \boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)$$

Como

$$p = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \rho'$$

Llegamos a la siguiente ecuacion

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = q(\boldsymbol{r}, t)$$

Y esto puede dar , en ausencia de fuentes, que $\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v})$=0

¿En que condiciones?

Por ejemplo, **cerca del borde de un tubo**, para el cual la presion es la atmosferica, o a bajas frecuencias … y entonces, $v_x(x) = v_x(x + dx)$

Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\, \boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)$$

Como

$$p = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \rho'$$

Llegamos a la siguiente ecuacion

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = q(\boldsymbol{r}, t)$$

Y esto puede dar , en ausencia de fuentes, que $\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v})$=0

¿En que condiciones?

Por ejemplo, **cerca del borde de un tubo**, para el cual la presion es la Atmosferica, o a bajas frecuencias … y entonces, $v_x(x) = v_x(x + dx)$

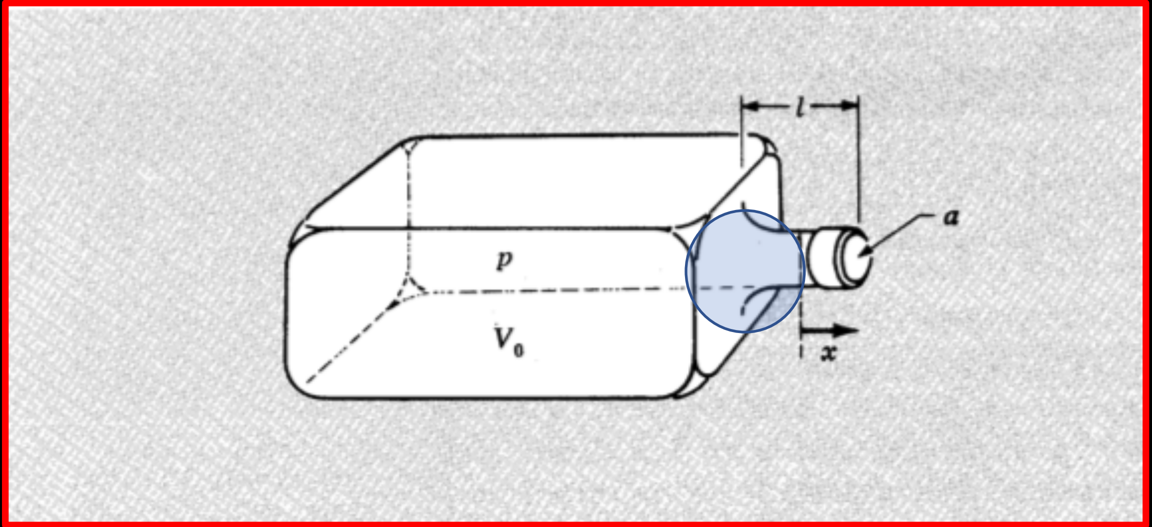
(se mueve “todo junto”)

Y de la conservacion del momento linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{grad}\, \boldsymbol{p} + \cancel{\rho_0} F$$

$$p(x) - p(x + dx) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \delta x$$

asi es como se mueve ese "todo"



Las ecuaciones de conservacion de momento y materia tambien son sencillas cerca de paredes, porque la velocidad es cero, y mas si las frecuencias son bajas.
Ahi

Conservacion del momento linealizada

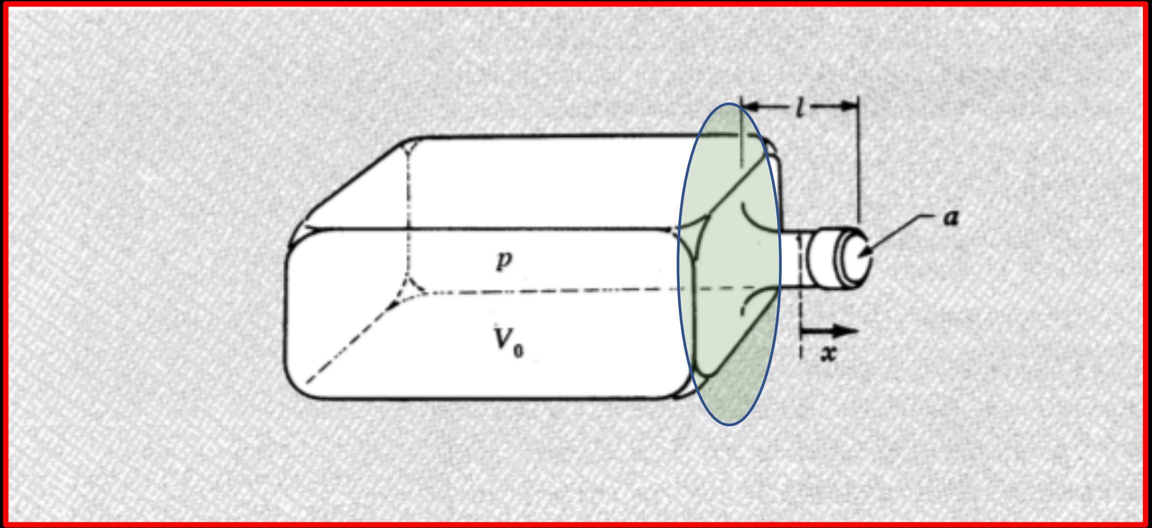
$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{p} + \cancel{\rho_0 F}$$

$$\boldsymbol{grad}\,\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{0}, \qquad p(x) - p(x+dx) = 0$$

Conservacion de la masa linealizada

$$\rho_0\,\boldsymbol{div}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \cancel{\rho_0 q(\boldsymbol{r}, t)}$$

$$v_x(x) - v_x(x+dx) = \chi_s \frac{\partial p}{\partial t}\,\delta x$$



La conexion entre el cuello y la zona en la cual la presion es constante se puede lograr con el teorema de la divergencia: el flujo u que entra en la cavidad es

$$\boxed{u = (V\chi_s)\frac{\partial p_V}{\partial t} - u_{source}}$$

Ecuacion en la cavidad

Y asumiendo que a la salida del cuello la presion es p_V

$$\boxed{-p_V = \left(\frac{\rho l}{S}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - p_{source}}$$

Ecuacion en el cuello

Combinandolas, tenemos estas posibilidades:

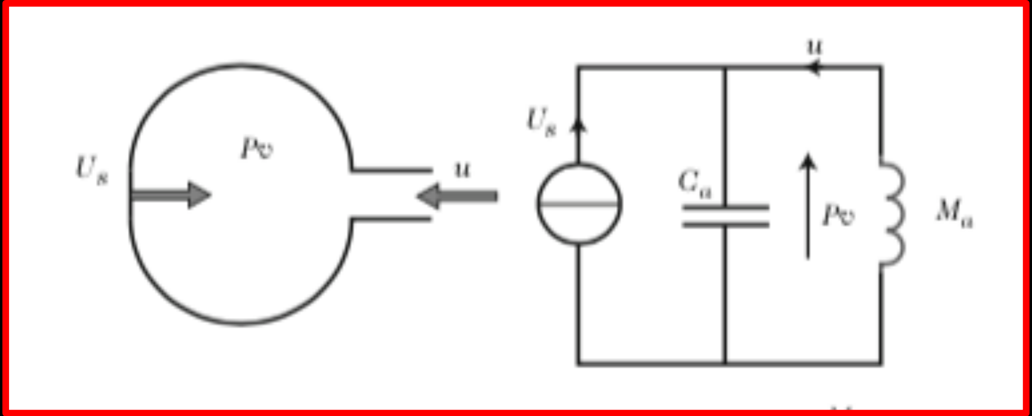
$$\boxed{V\chi_s \frac{\partial^2 p_V}{\partial t^2} + \frac{1}{(\rho l/S)} P_V = \frac{\partial u_{source}}{\partial t}}$$

o

$$\boxed{\rho l/S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{(V\chi_s)} u = \frac{\partial p_{source}}{\partial t}}$$

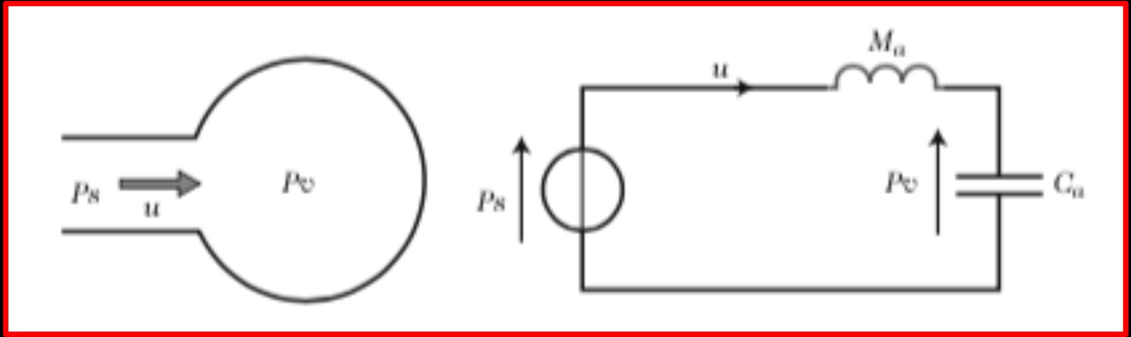
$$\boxed{V\chi_s \frac{\partial^2 p_V}{\partial t^2} + \frac{1}{(\rho l/S)} P_V = \frac{\partial u_{source}}{\partial t}}$$

Usamos esta si hay una fuente flujo en la cavidad (golpeamos una pared, por ejemplo)



$$\boxed{\rho l/S\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{(V\chi_s)}u=\frac{\partial p_{source}}{\partial t}}$$

Usamos esta si hay una fuente de presion en el cuello (soplamos cerca del pico)



La version sencilla de la cuenta

El proceso es adiabatico

PV^{γ}=constante

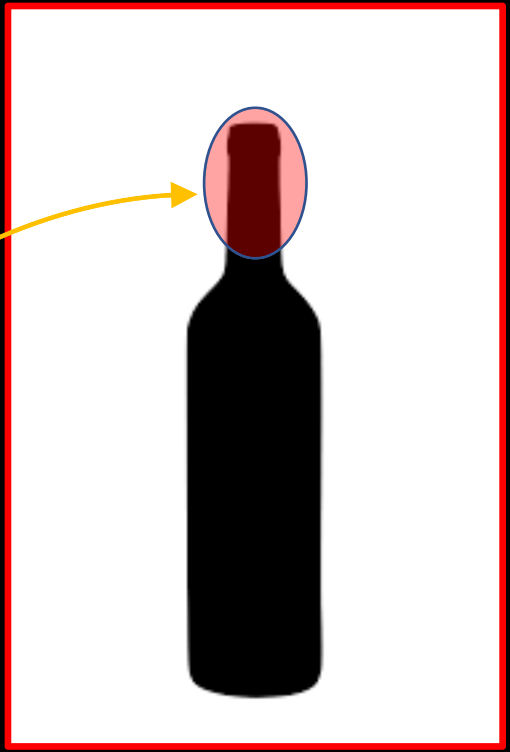
$$dP\,V^{\gamma} + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

$$\frac{F}{A} = -\frac{P\gamma}{V}xA$$

$$F = -\underbrace{\frac{P\gamma}{V}A^2}_{k}\ x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

m

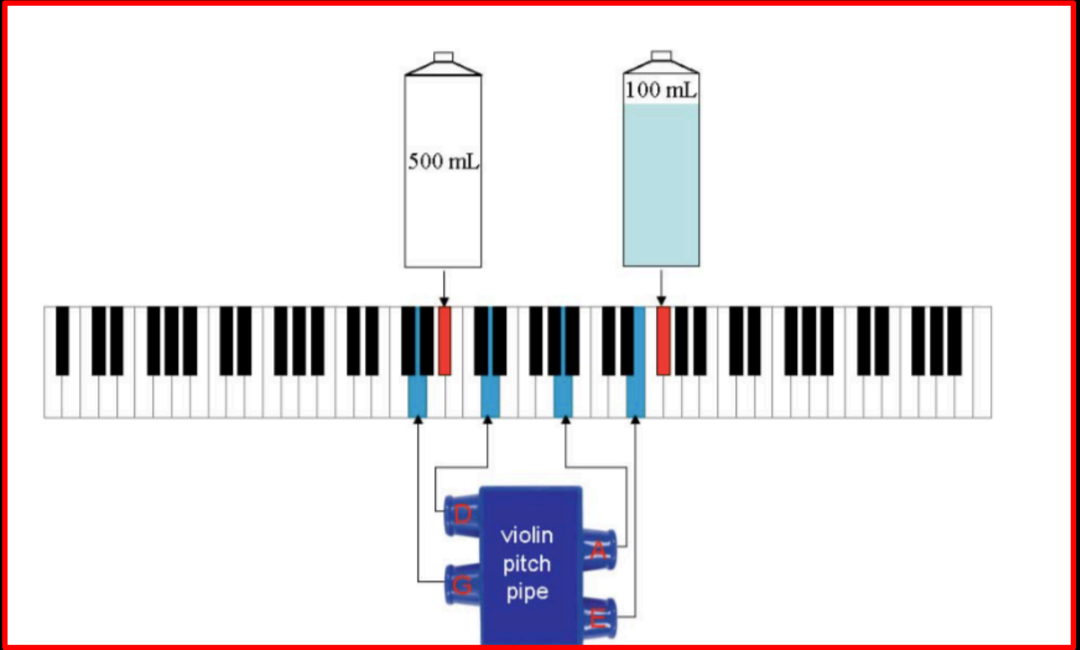


Ejemplo

$$\mathrm{p} = 101700\ \mathrm{Pa}$$
$\gamma = 1.4$ (diatomicos, oxigeno y nitrogeno)
A= $3.14\ 10^{-4}$
V=$0.0015\ \mathrm{m}^3$
M= $3.04\ 10^{-5}\ \mathrm{Kg}$

$$f \sim 83\ Hz$$

- La cavidad de aire de un instrumento de cuerda, como el violín o la guitarra, funciona acústicamente como un resonador de tipo Helmholtz, reforzando las frecuencias cercanas al fondo del rango del instrumento y, por lo tanto, dando al tono del instrumento más fuerza en su rango bajo.

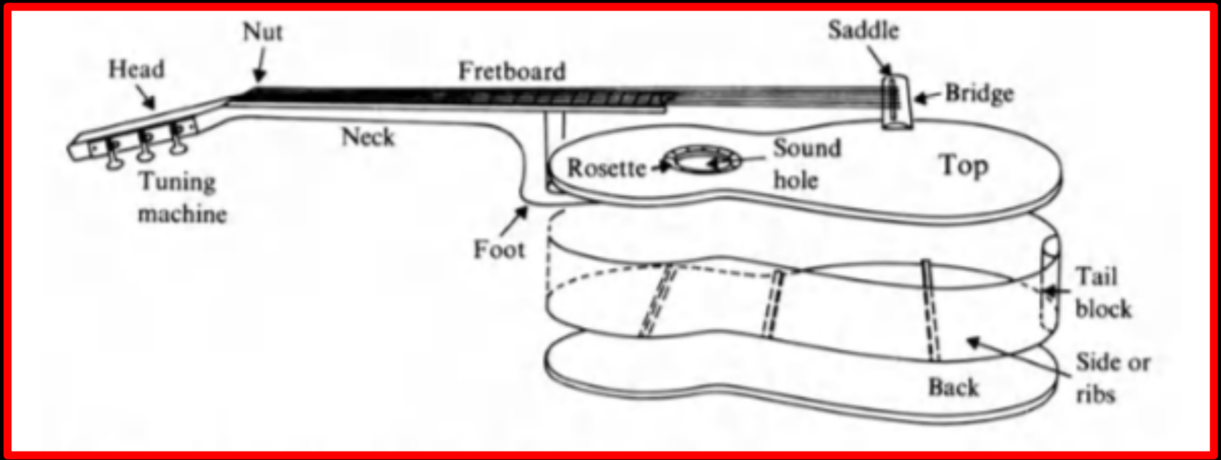


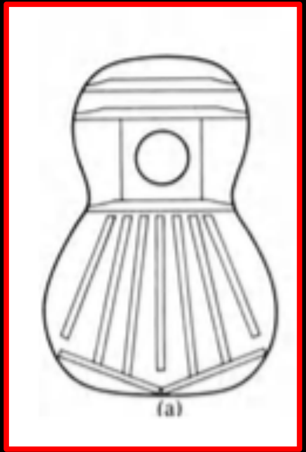
Ejericio para tener una
Idea de los ordenes de magnitud

Estimar el volumen de la cavidad de un violin
Estimar la frecuencia enfatizada por el resonador

Ahora bien, una vez que uno tiene entendido el fenomeno del resonador,
Y los modos de vibracion de las tablas (como vimos en la clase anterior),
llega el momento de acoplarlos.

Supongamos una guitarra con las costillas fijas.
Cuerdas en E_2, A_2, D_3, G_3, E_4 $(f = 82,110,147,196,247\ y\ 330\ Hz)$



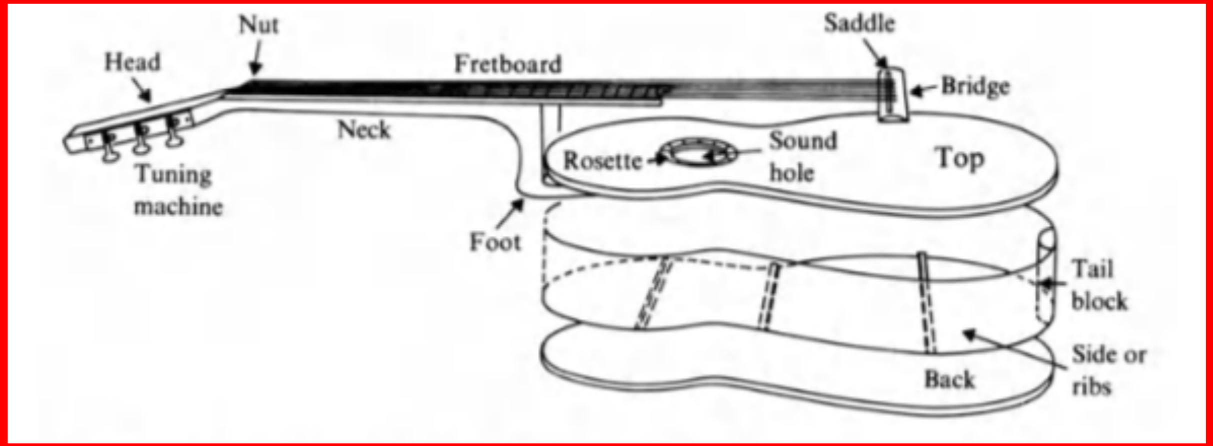


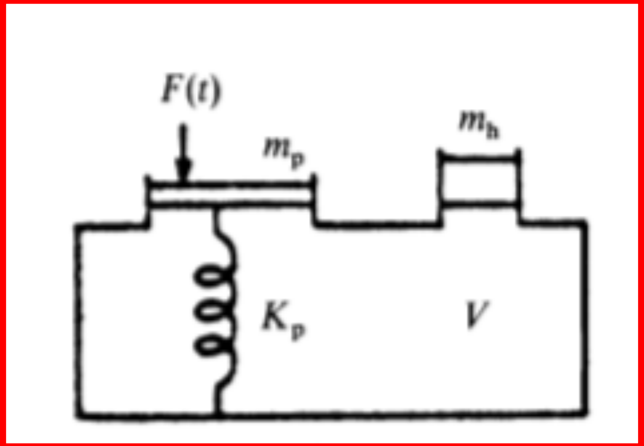
Antonio de Torres
(1817-1892)

Sobre la vieja vihuela
del siglo XVI

Ahora bien, una vez que uno tiene entendido el fenomeno del resonador,
Y los modos de vibracion de las tablas (como vimos en la clase anterior),
llega el momento de acoplarlos.

Supongamos una guitarra con las costillas fijas., e ignoramos el movimiento de la placa posterior,
podemos pensar al instrumento como un sistema de dos masas:

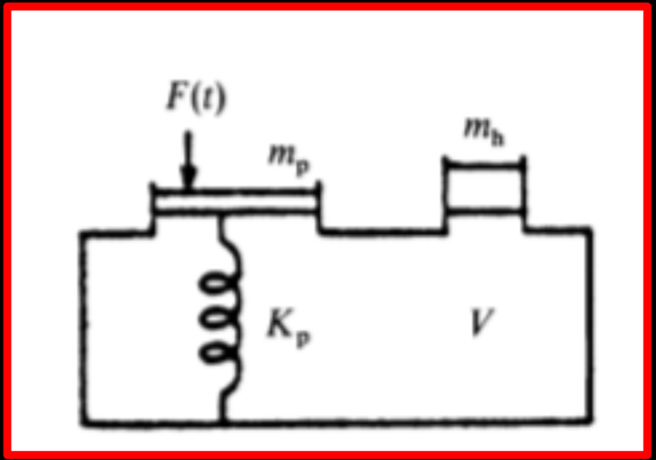




$F(t)$ es el forzante llevado a cabo por las cuerdas

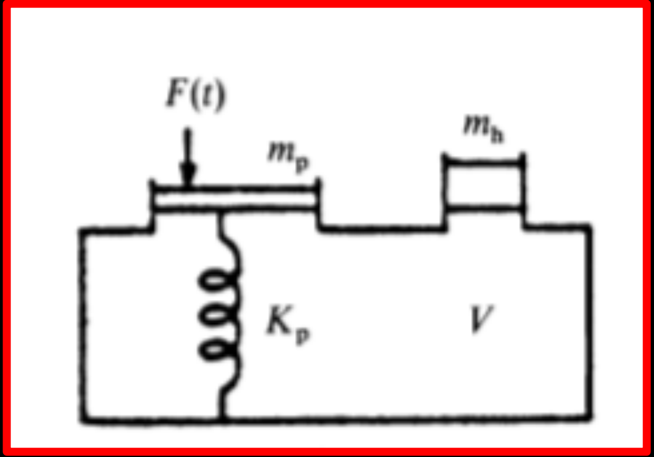
m_p y K_p representan las propiedades inertivas y elasticas de la oscilacion de un modo de la tabla

m_h y V representan la masa del aire en el "agujero" de la tabla y el volumen de la cavidad a cargo de la restitución elástica del resonador.



$$m_p\ddot{x}_1 + K_p x_1 + R_p\dot{x}_1 + K_2\,(x_1 - x_2) = F(t)$$

$$m_h\ddot{x}_2 + K_V x_2 + R_v\dot{x}_2 + K_2\,(x_2 - x_2) = 0$$

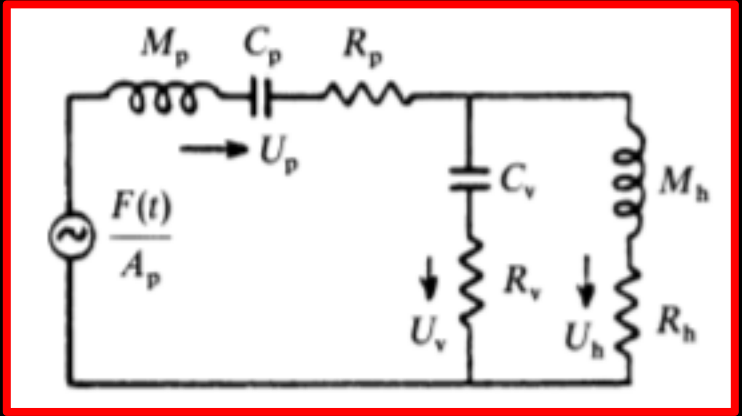


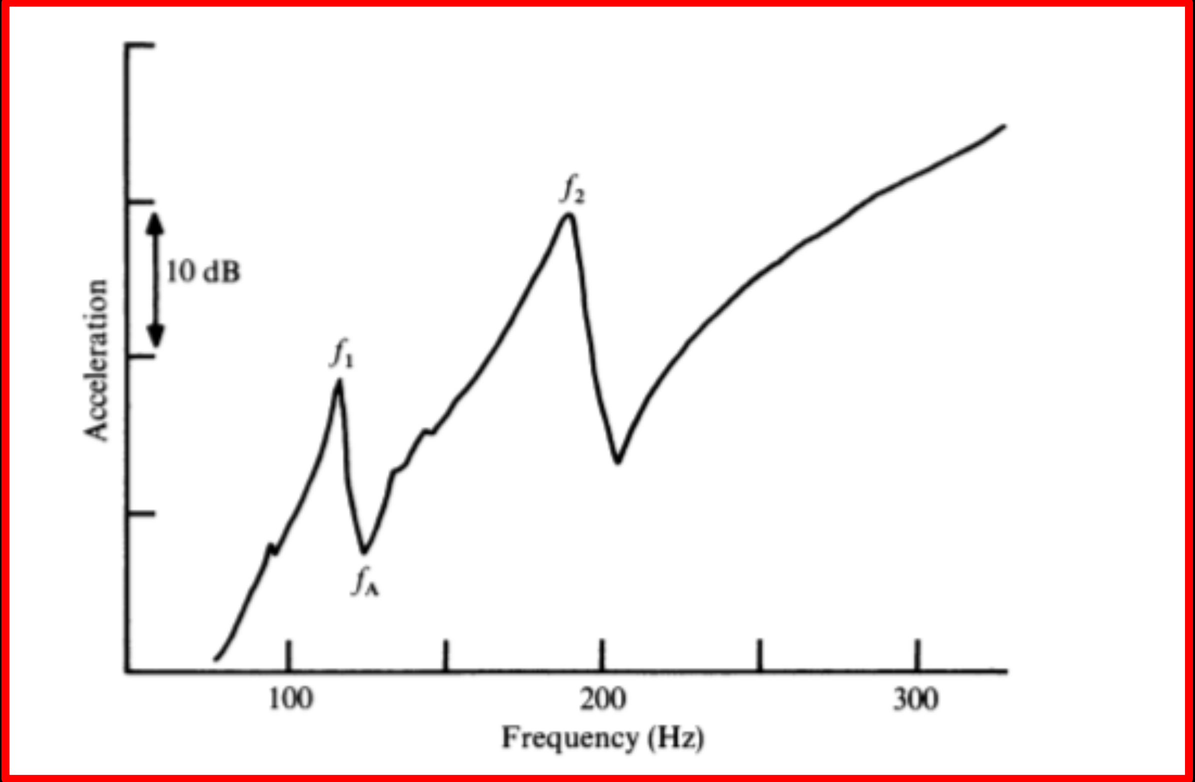
$M_p = m_p/({A_p}^2)$ inertancia de la placa de arriba

$M_h = m_h/({A_h}^2)$ inertancia del agujero del taponcito de aire
Por el que sale el sonido

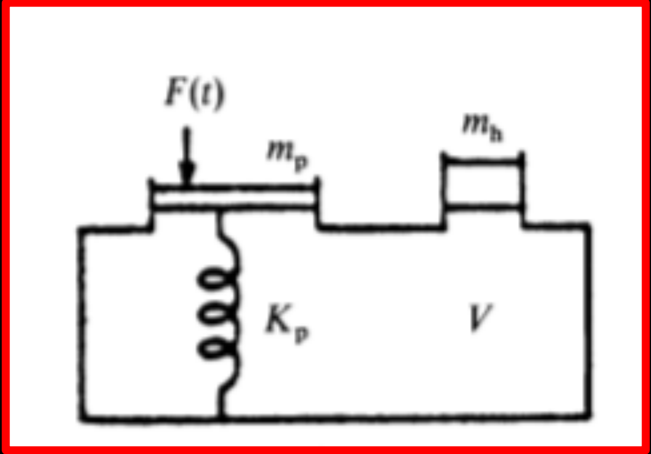
$C_p = {A_p}^2/K_p$ compliance de la placa de arriba

U_h flujo de aire a través del agujero de la tabla

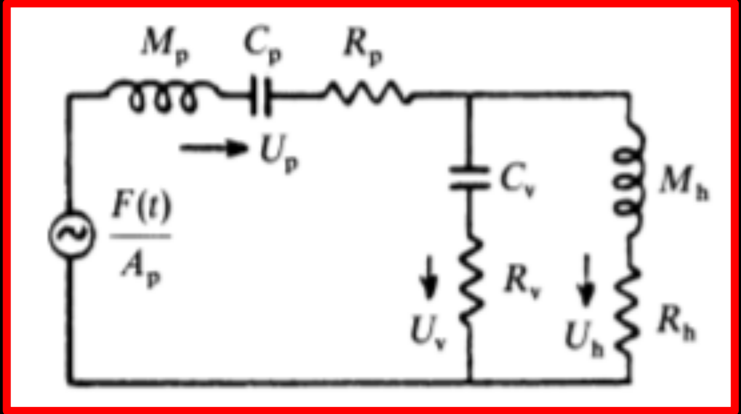




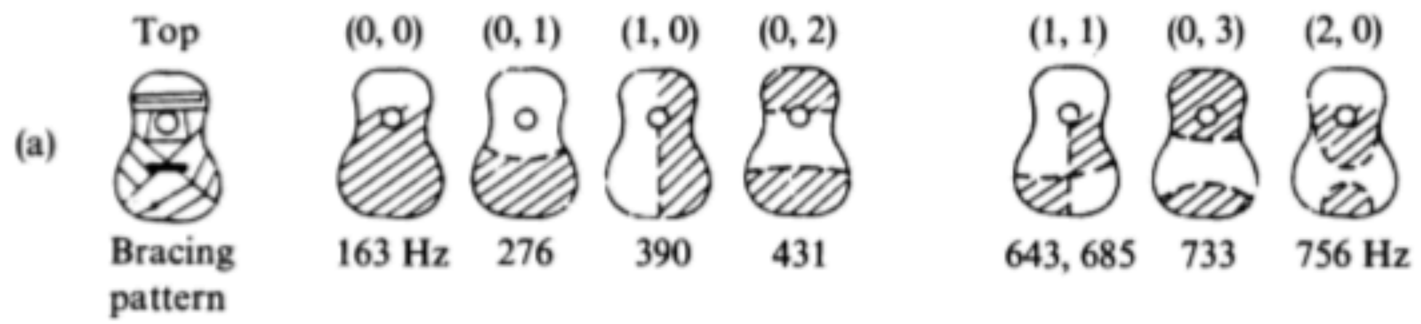
Acceleration
10 dB
f_1
f_A
f_2
100
200
300
Frequency (Hz)

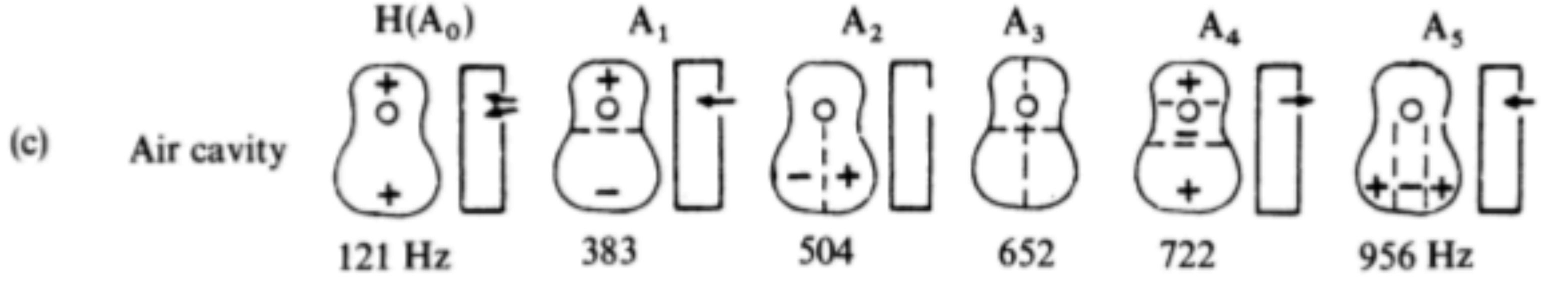


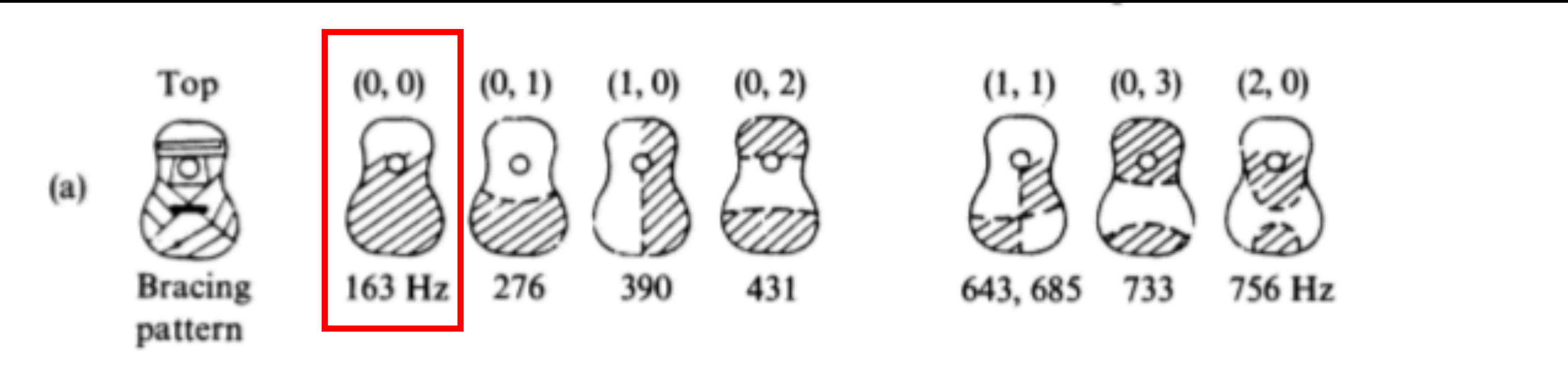
$F(t)$
m_p
m_h
K_p
V

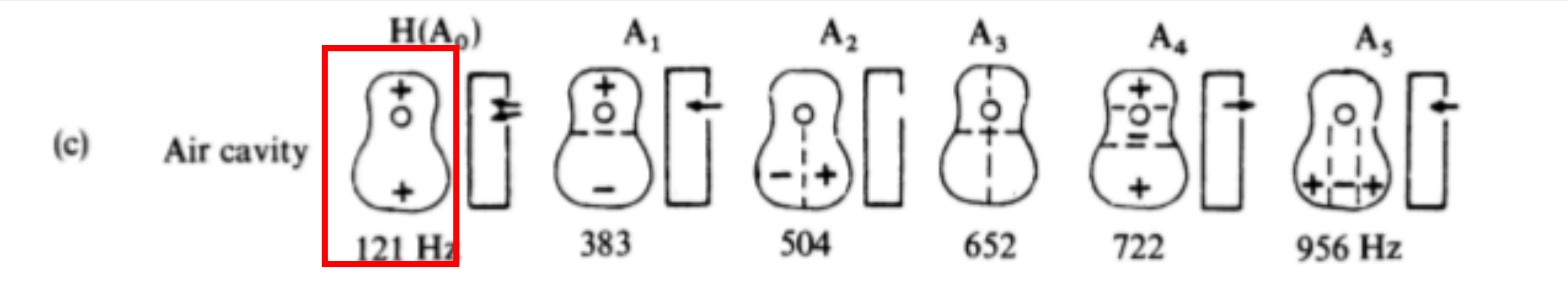


M_p
C_p
R_p
U_p
C_v
M_h
$\frac{F(t)}{A_p}$
R_v
U_v
U_h
R_h

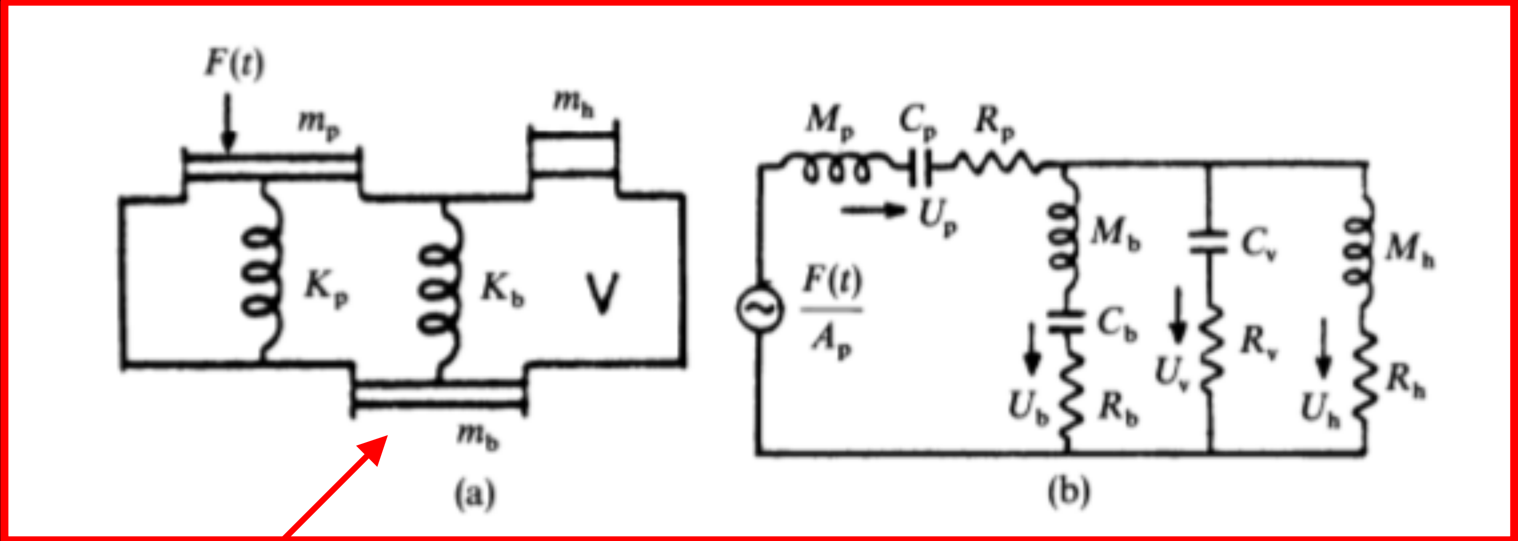

(a)
Top
Bracing pattern
(0, 0)
(0, 1)
(1, 0)
(0, 2)
(1, 1)
(0, 3)
(2, 0)
163 Hz
276
390
431
643, 685
733
756 Hz


(c)
Air cavity
$H(A_0)$
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
121 Hz
383
504
652
722
956 Hz


(a)
Top
Bracing pattern
(0, 0)
(0, 1)
(1, 0)
(0, 2)
(1, 1)
(0, 3)
(2, 0)
163 Hz
276
390
431
643, 685
733
756 Hz

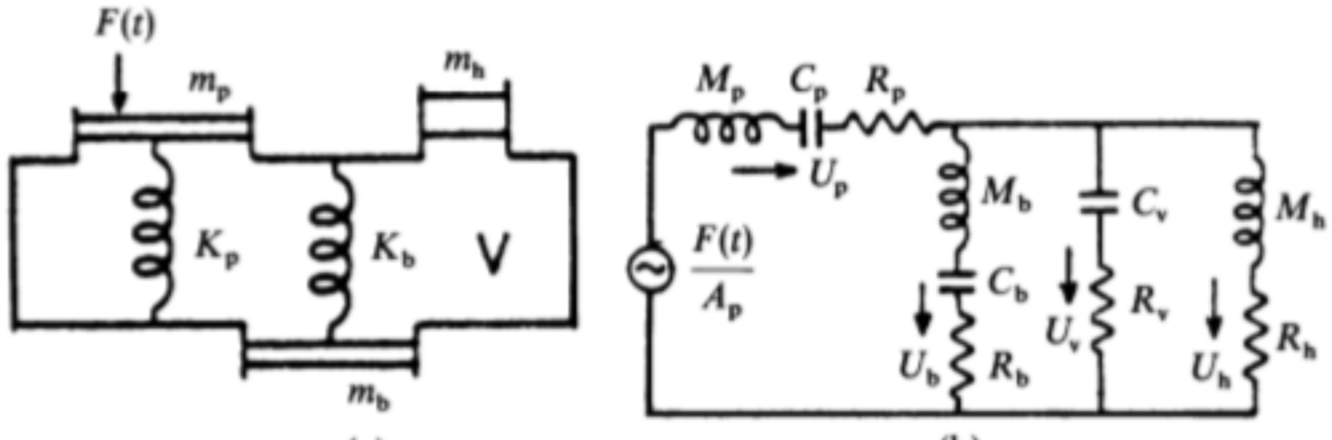

(c)
Air cavity
H(A0)
A1
A2
A3
A4
A5
121 Hz
383
504
652
722
956 Hz

Modelo de tres masas

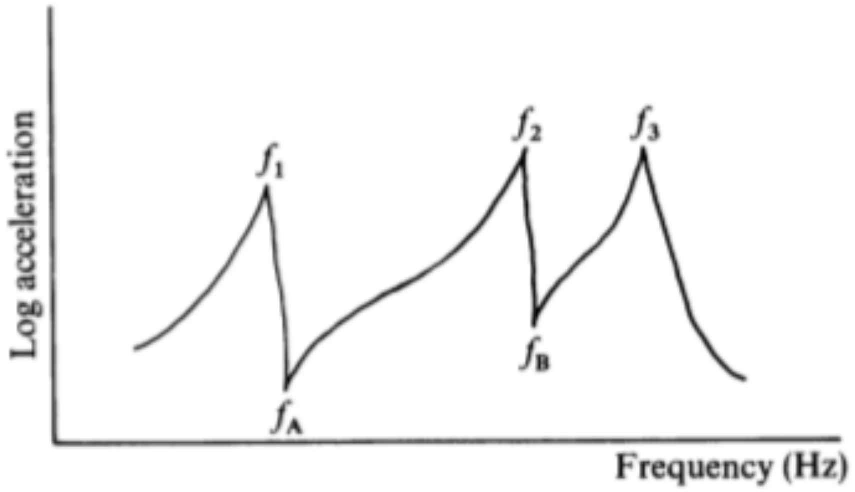


Representacion de la placa de abajo

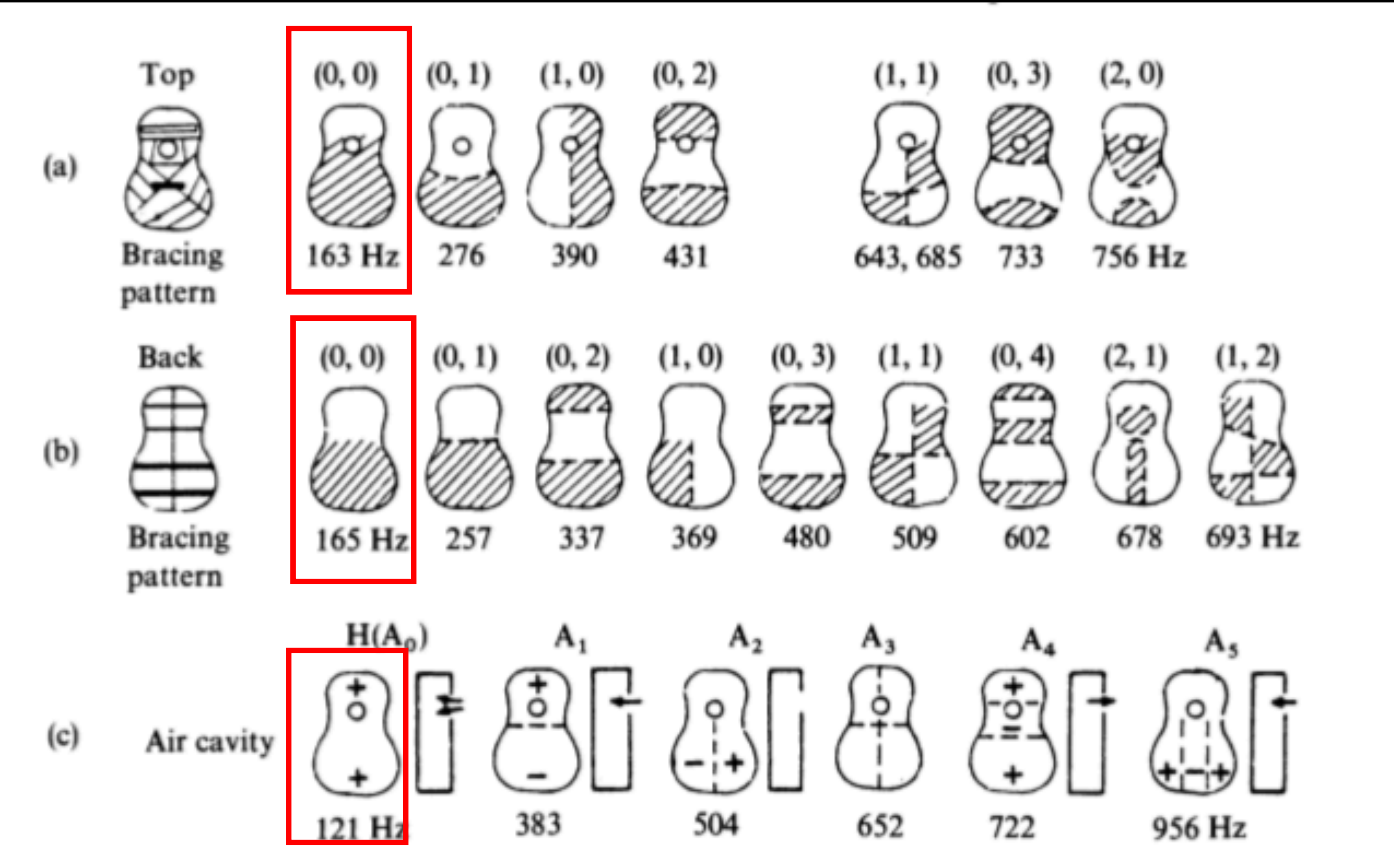
Modelo de tres masas



(a) (b)



Muchas guitarras tienen tres resonancias fuertes entre los 100 y 200 Hz debido al acople de estos modos



$$f(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow g(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

La funcion amplificada resulta la transformada del producto de dos trasnformadas inversas:

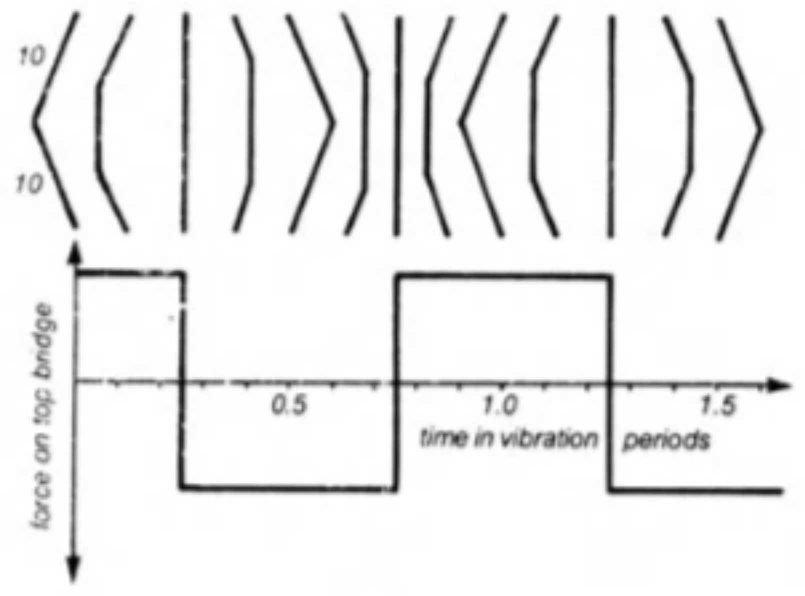
$$\varphi(\omega)F(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt$$

Con $\Phi(t)$la respuesta del filtro a un impulso, y $F(\omega)$ la transformada de la fuente

Nunca esta de mas recordar que los resonadores, es junto a la Riqueza espectral de la fuente que determinan el timbre. En el caso de La guitarra, por ejemplo:

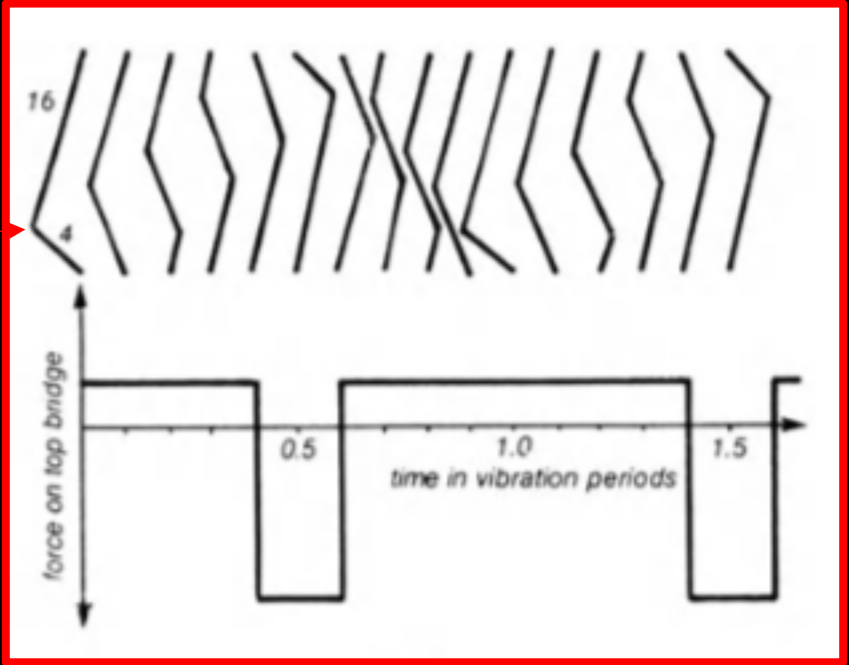
pulsada en el medio



(a)

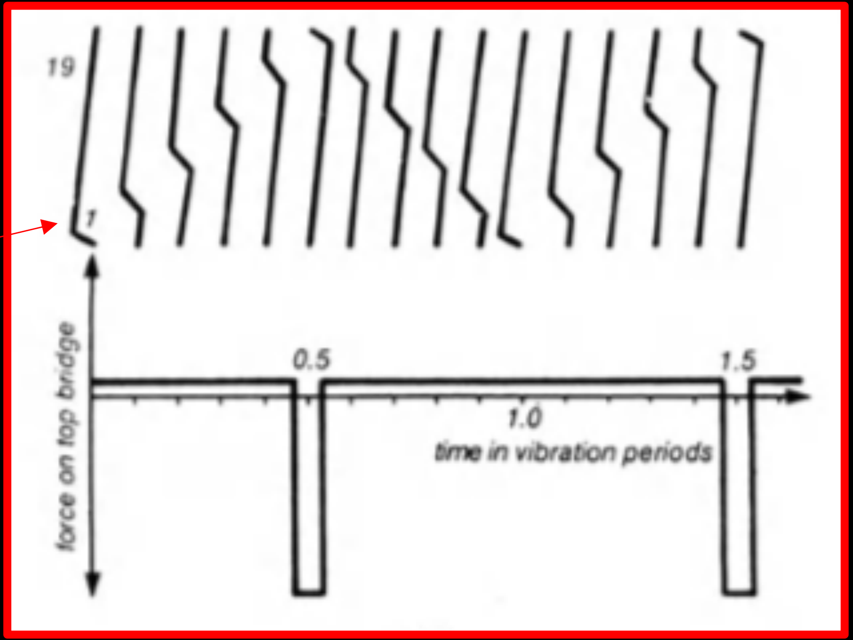
Nunca esta de mas recordar que los resonadores, es junto a la
Riqueza espectral de la fuente que determinan el timbre. En el caso de
La guitarra, por ejemplo:

pulsada mas abajo

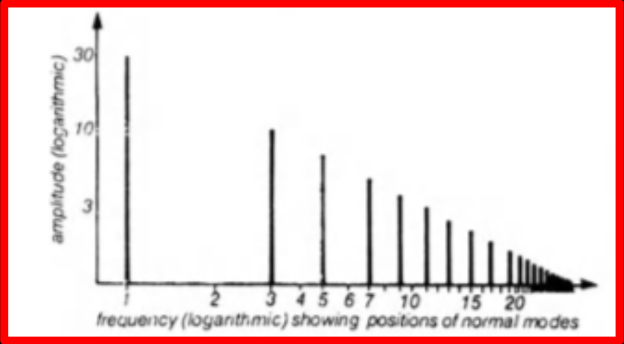


Nunca esta de mas recordar que los resonadores, es junto a la Riqueza espectral de la fuente que determinan el timbre. En el caso de La guitarra, por ejemplo:

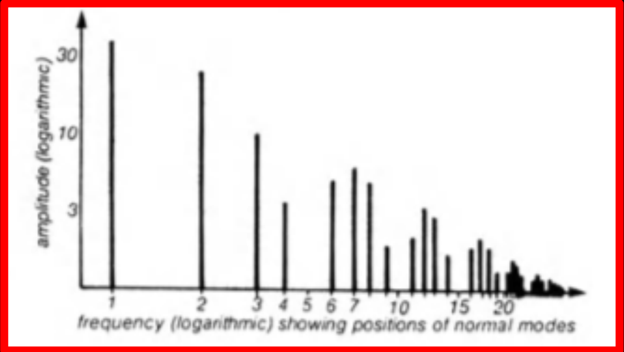
pulsada mas abajo aun



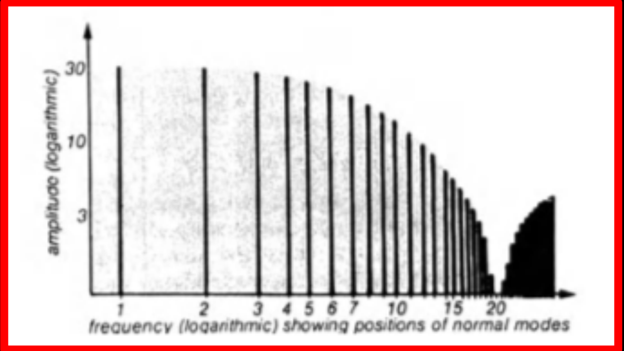
pulsada en el medio

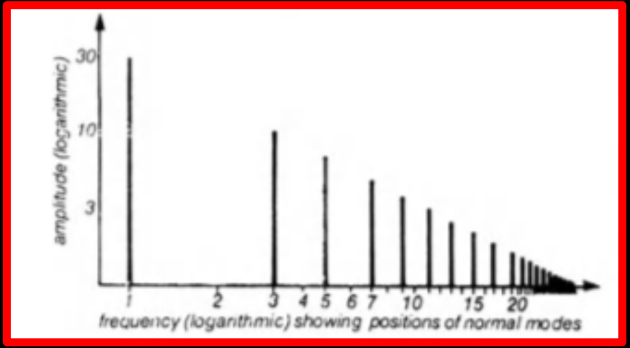


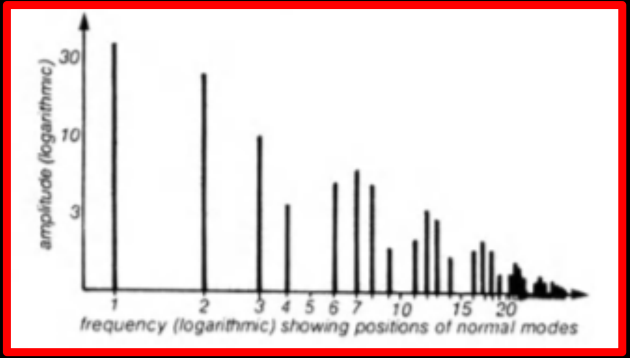
Pulsada a un quinto de L

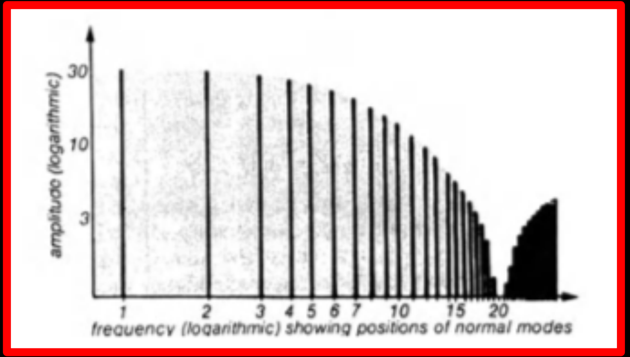


Pulsada a L/20









X Espectro de la señal que deviene de excitar impulsivamente al resonador = el espectro del sonido resultante