Análisis y modelado de las oscilaciones transversales de una campana tubular

Autores: Fernando Giovannetti, Matías B. Zablotsky, Matías Kychenthal
Docentes: Gabriel Mindlin, Leandro E. Fernández
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES · FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Una campana tubular consiste en un tubo de metal (en nuestro caso aluminio), el cual se hace sonar percutiéndolo levemente. La fuerza restitutiva que da origen a la oscilación y genera el sonido proviene de su propia rigidez. Este instrumento tiene la característica de ser inarmónico, esto es, los sobretonos (las frecuencias que componen su espectro) no son múltiplos enteros de la fundamental como ocurre en la mayoría de los instrumentos. Esto hace que su timbre no sea compatible con una armonía en particular, haciendo que su uso sea algo dificultoso en la música. En este trabajo se pretende poner a prueba un modelo para el cálculo de los sobretonos contrastandolo con mediciones concretas.

Newton: Como estamos analizando las ondas transversales, planteamos la segunda ley de Newton, para las fuerzas verticales. La masa en un tramo *"dx"*, es el producto de la densidad por la sección por dx.

$$F_y = \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

Torque: Para flexionar una barra es necesario aplicar un momento en cada extremo del tramo dx, el momento neto es la suma de ambos, la fuerza vertical total se relaciona con el momento mediante:

$$F_y = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx$$

Momento Flexor (restaurador): La flexión de una barra implica el estiramiento de las láminas exteriores y compresión de las láminas interiores (respecto del centro de curvatura), cada lámina realiza una fuerza dF restitutiva, el momento flexor *M* es la integral del producto entre el diferencial de fuerza y la distancia *z* al centro de curvatura. Luego de un desarrollo tenemos que el momento flexor es:

$$M = -Y.S.\kappa^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Combinando lo anterior la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2.\kappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \longrightarrow \omega(K) = \pm c\kappa K^2$$

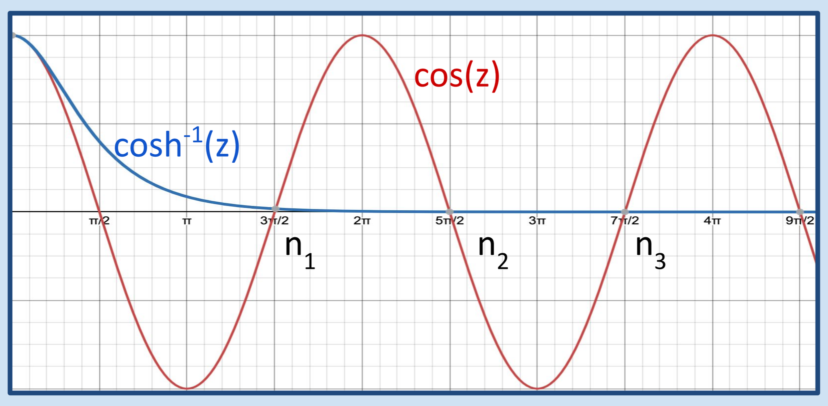
En donde κ es la constante asociada a la forma de la sección de la barra, en este caso es una sección anular, y usando se llega a una fórmula con ambos radios del tubo:

$$\kappa = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2}$$

Usando separación de variables y las condiciones de borde de extremos libres para el tubo obtenemos que:

$$cosh(z)cos(z) = 1 \quad \text{donde} \quad z = \frac{\omega}{v_f} L$$

Resolviendo gráficamente se ve que la soluciones son aproximadamente las raíces del coseno menos la primera.



Sustituyendo la velocidad de fase y despejando la frecuencia queda:

$$\boxed{f \approx \frac{\pi c \kappa}{8L^2}(2n+1)^2} \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

Relación entre longitudes para determinar notas musicales en tubos:

En la escala bien temperada la relación entre frecuencias de dos semitonos consecutivos debe cumplir:

$$\frac{f\#}{f} = \sqrt[12]{2}$$

La misma relación deben cumplir las longitudes de una cuerda, o de columnas de aire, correspondientes a dos semitonos consecutivos, pero para tubos rígidos de percusión la relación entre frecuencias y longitudes es:

$$\frac{f\#}{f} = \left(\frac{L}{L'}\right)^2$$

Lo que lleva a:

$$\frac{L}{L'} = \sqrt[24]{2}$$

De esta manera podemos encontrar las medidas para construir una escala musical bien temperada con campanas tubulares.

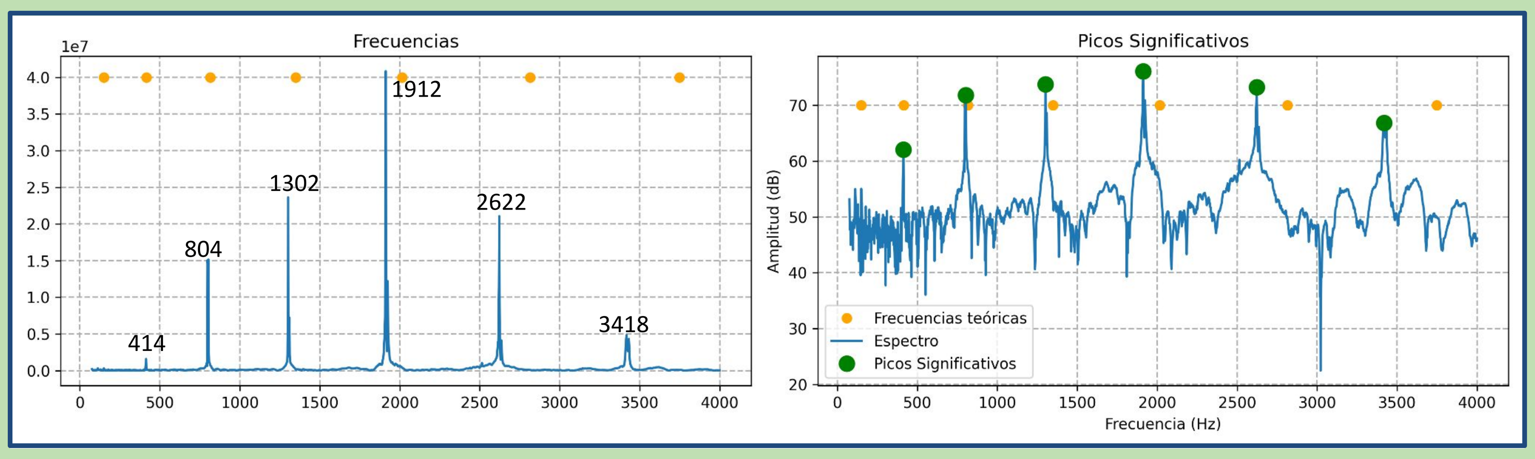
Método experimental:

Se tomó un tubo de aluminio de un metro de longitud y de radios externos e internos de 12.7 mm y 11.1 mm respectivamente, medidos con error de 0.1 mm. Con estos datos podemos calcular la constante geométrica que arrojó un valor de (0.0084 ± 0.0001) m. Por otro lado, teniendo en cuenta la densidad y el módulo de Young tabulados para el aluminio, la velocidad del sonido a través de este material es 5050 m/seg. Con estos datos, utilizando la ecuación para las frecuencias, calculamos los sobretonos que esperamos obtener para los primeros modos.

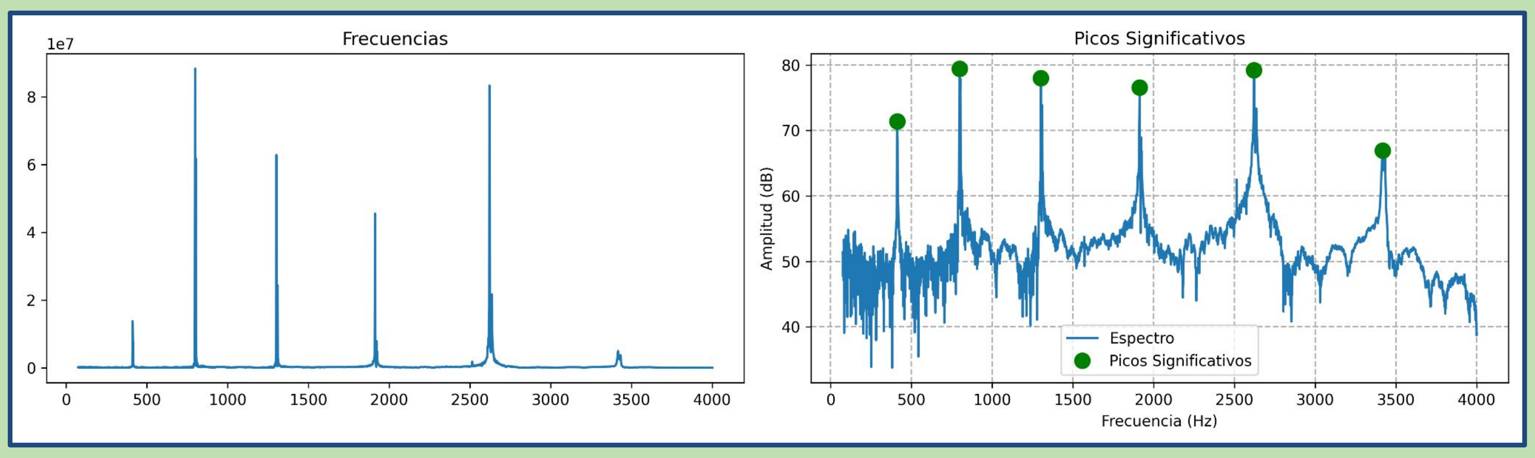
Frecuencias calculadas:

n	1	2	3	4	5	6	7	Error
f (Hz)	150	416	816	1349	2015	2815	3747	2%
f_n/f_1	1	2.77	5.44	8.99	13.43	18.76	24.98	

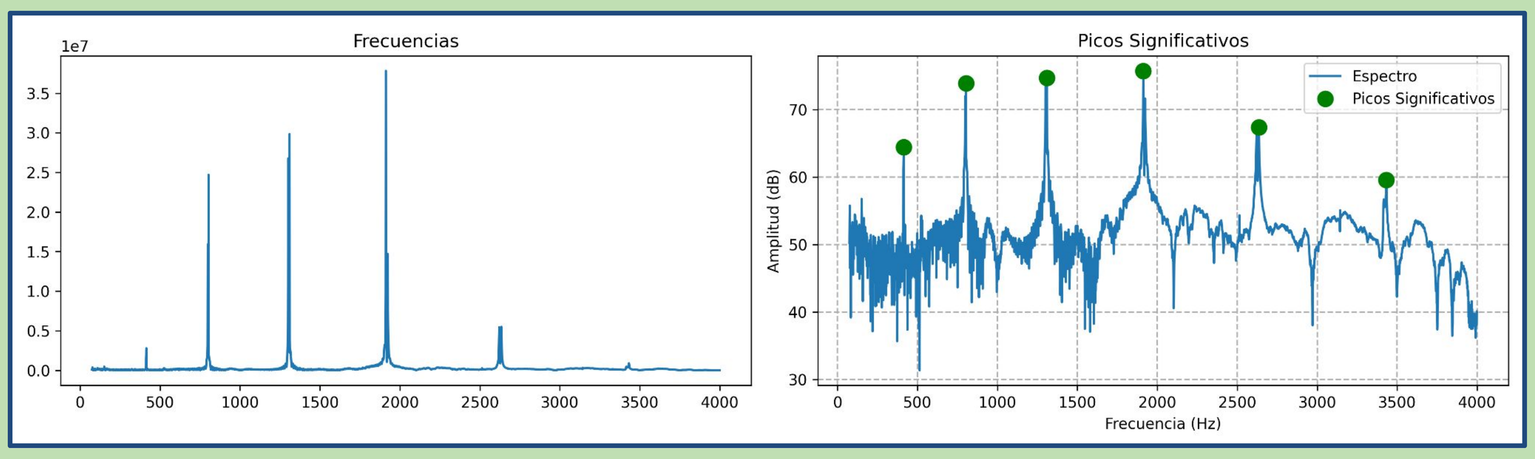
Percutido en el extremo



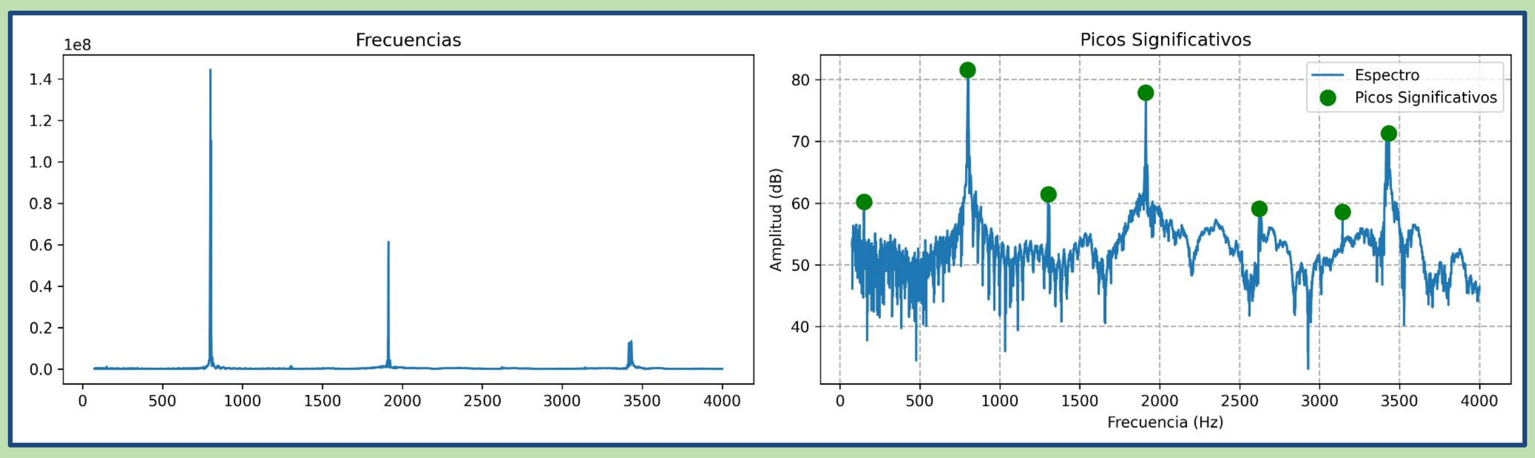
Percutido en *L/4*



Percutido en *L/3*



Percutido en *L/2*



Conclusiones

En primer lugar se pudo corroborar que los sobretonos de una campana tubular percutida no son múltiplos enteros de la fundamental, también se corroboró que el armónico con mayor intensidad no es el de menor frecuencia, lo cual da una idea de porqué es tan difícil determinar *qué* nota musical está sonando cuando se percute el tubo. Por otro lado se puso a prueba el modelo para el cálculo de los sobretonos, y corroboramos que funciona bastante bien para las frecuencias bajas, pero se desvía para frecuencias más altas. Pudimos observar que las frecuencias no dependen del lugar en donde se percute, y notamos que al golpear el tubo en *L/2* se anulan los modos pares al igual que ocurre en una cuerda típica, no es tan evidente el el caso de *L/3* y *L/4*.

Corroboramos experimentalmente que la relación entre longitudes para semitonos no van con $\sqrt[12]{2}$, como en los instrumentos típicos, sino que en este caso va como $\sqrt[24]{2}$.

Sería interesante pensar algún criterio para identificar qué nota es la predominante en el sonido de una campana tubular. Uno de ellos es modificar la condiciones de contorno, el material del tubo o la forma de percusión. También se puede investigar la resonancia de la campana tubular haciendo sonar dos tubos de mismas dimensiones. Además, es posible estudiar las oscilaciones longitudinales presentes.